Àlgebra Lineal

EINES BÀSIQUES D'ÀLGEBRA LINEAL

M. Carmen Hernando Martín
M. Dolors Magret Planas
Carles Puig Pla
M$^{\text{a}}$ Rosa Massa Esteve

Presentació

El propòsit d'aquest llibre és el d'oferir una ajuda als estudiants per tal que es familiaritzin amb alguns conceptes bàsics, la qual cosa els permetrà de seguir un curs d'àlgebra lineal sense entrebancs. Cal tenir present que avui en dia l'àlgebra lineal és una part essencial de les matemàtiques i s'utilitza en una extensa varietat de disciplines. Així, les nocions bàsiques tractades en aquest llibre seran d'interès per a aquells estudiants que vulguin dedicar-se a les enginyeries (industrial, de telecomunicacions,...), a la informàtica, a l'estadística, a l'economia, etc. Tanmateix, no presentem aquí algunes de les molts variades aplicacions de l'àlgebra lineal. L'únic que pretenem és que l'estudiant adquireixi soltura en la utilització de les eines que aquí trobarà.

Precedits d'un capítol dedicat a les estructures algebraiques, el tòpics d'objecte d'estudi d'aquest llibre són: nombres complexos i polinomis, matrius (incloent la resolució de sistemes d'equacions) i determinants.

S'ha procurat fer un enfocament dels temes de la forma més entenedora possible sense renunciar, però, a una presentació rigorosa dels mateixos. Així, s'ha fugit d'una excessiva abstracció, tot atenent al caràcter elemental dels temes. En canvi, sí que hem procurat donat de cadascun dels temes bàsics tractats una visió el més àmplia possible, tot acompanyant els resums de la teoria corresponents d'abundants exemples i exercicis, basats en l'experiència docent dels autors.

És el nostre desig que aquest llibre pugui resultar útil a molts estudiants que comencen els seus estudis universitaris, bé de caràcter tècnic o bé científic. Tot i que es pot trobar actualment una gran varietat de programes informàtics que utilitzen algunes d'aquestes eines bàsiques, d'on es pot deduir la seva gran importància, la possibilitat d'efectuar càlculs simbòlics amb ordinador no eximeix aquells que els utilitzen de dominar aquestes eines subjacents, ans al contrari, un bon domini d'elles garanteix una comprensió dels problemes que en utilitzar-los puguin anar sorgint.

Finalment, volem agrair a la Rosa Maria Cuevas la seva eficiència a l'hora de transcriure els manuscrits.

Els autors

ÍNDEX

Introducció: context històric

Entorn del desenvolupament històric de les equacions algebraiques

Mª Rosa Massa - M. Dolors Magret
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

El conjunt dels nombres enters i el de polinomis amb coeficients en un cos són els exemples més bàsics d'anells commutatius, que constitueixen l'essència de l'àlgebra commutativa, branca de les matemàtiques estretament lligada a la geometria algebraica. És a finals del segle XIX que, amb el desenvolupament de l'àlgebra abstracta, els anells de polinomis es van començar a estudiar des d'un nou enfocament.[1]
L'estudi dels polinomis i de les equacions associades a ells, ha evolucionat molt al llarg del temps, i el seu recorregut històric és molt suggerent i instructiu. Aquí analitzem dos aspectes claus d'aquest desenvolupament. En l'apartat 1, ens ocupem de l'evolució històrica del problema de determinar les solucions de les equacions polinòmiques per radicals a partir dels seus coeficients; en l'apartat 2, tractem de l'evolució històrica de les demostracions del que avui anomenem Teorema fonamental de l'àlgebra.

1. Resolució de les equacions algebraiques

Un algorisme de resolució d'equacions algebraiques de segon grau ja es pot deduir a partir de problemes resolts a les tauletes babilòniques. La matemàtica "babilònica" (1500 aC) va ser transmesa per escribes i bàsicament utilitzada per càlculs relatius a problemes de la vida real. D'entre les tauletes d'argila en escriptura cuneïforme realitzades pels babilònics n'hi ha moltes de numèriques (taules de multiplicació, taules de recíprocs,...). Les tècniques que feien servir per a la construcció d'aquestes taules numèriques constituïen el nexe entre els càlculs i la realitat administrativa i d'enginyeria. Els babilònics van ser els primers a formular un algorisme consistent en una sèrie d'instruccions (sense cap explicació) per a trobar solucions concretes a problemes que es poden descriure mitjançant una equació de segon grau.[2]

La matemàtica grega, basada en la geometria, va fer també la seva aportació a la resolució d'equacions algebraiques. En els *Elements* d'Euclides (300 aC) es recullen els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i es demostren algunes proposicions geomètriques que es poden interpretar en termes d'equacions de segon grau.[3]

De Diofant d'Alexandria ($\sim$ 250 - $\sim$ 350) es conserven dues obres: *Les Aritmètiques* i *Els nombres poligonals*. La primera consta de tretze llibres, dels quals se n'han conservat només sis, i és un recull de problemes que, està dedicat a la resolució de problemes que, a l'hora de resoldre's, donen lloc a equacions de primer i segon grau, sempre concretes. Es fa palesa en la seva obra una gran habilitat manipulant artificis aritmètics, sense que en cap moment s'intenti abordar el problema de trobar totes les solucions en el cas general. Les solucions negatives són considerades com absurdes; les irracionals o complexes, com a impossibles.

Cal destacar el paper fonamental que els àrabs han jugat en el desenvolupament de les equacions algebraiques. Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi (850 dC), matemàtic, astrònom i membre de la Casa de Saviesa de Bagdad és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. Va escriure *Hisab al-jabar wal-muqqabala* (813-830), traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra. L'obra d'Al-Khwarizmi classificava les equacions fins a segon grau en sis tipus diferents, i explicava les regles a seguir per a resoldre-les.[4] Totes les àlgebres àrabs, basades en l'obra d'Al-Khwarizmi, constaven d'una part teòrica on apareix, per exemple, la multiplicació de polinomis, i d'una part pràctica on es resolien problemes relacionats amb el comerç i altres aspectes de la vida quotidiana, utilitzant la classificació anterior de resolució de les equacions. Qui va difondre en el món occidental tots aquests coneixements va ser Leonardo da Pisa, fill de Bonacci (1180-1250), que s'ha conegut amb el nom de Fibonacci. A la seva obra *Liber abaci* (1202) s'hi troben molts dels problemes considerats en els textos de les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració hindú.[5]

L'època menys coneguda del desenvolupament de les equacions algebraiques correspon als segles XIII i XIV, on floriren les matemàtiques comercials amb les Aritmètiques mercantils, obres que encara s'estan descobrint i analitzant.[6] En aquests llibres les regles àrabs de resolució algebraica apareixen moltes vegades com un apèndix. El saber d'aquestes aritmètiques mercantils i de les àlgebres àrabs es recull en una obra de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494) que va tenir gran difusió a la seva època.

Més tard, Girolamo Cardano (1501-1576) i Rafael Bombelli (1526-1573), entre d'altres algebristes del Cinquecento, van contribuir amb les seves obres: *Ars Magna* (1545) i *Algebra* (1572), respectivament, a la resolució de les equacions de tercer grau i biquadrades, justificant de manera geomètrica els resultats obtinguts per via purament àbac-algebraica.[7] Cardano resol 20 tipus d'equacions de quart grau, però els atribueix a Ludovico Ferrari (1522-1565). És interessant subratllar que Cardano en la seva obra estudia les equacions

algebraiques de manera sistemàtica i com una branca diferenciada dins les matemàtiques.[8]
Aquests matemàtics, en resoldre equacions, es troben amb l'aparició d'arrels quadrades de nombres negatius, ja que aquestes apareixen en la fórmula de la solució general de les equacions de tercer grau. Potser aquí és on sorgeix la necessitat d'operar amb els que avui anomenem *nombres complexos*.[9] Fins aquest moment, fins i tot les solucions negatives de les equacions només eren acceptades quan se'ls podia donar una interpretació. En canvi, Cardano accepta sempre solucions negatives per a les equacions, tot i que les qualifica com a falses (o fictícies). D'altra banda, Bombelli a l'*Algebra* introdueix els nombres complexos, amb una terminologia específica: anomena pdm ("più di meno") a $\sqrt{-1}$ i mdm ("meno di meno") a $-\sqrt{-1}$, i dóna les regles fonamentals per operar amb ells.[10]

En aquest recorregut històric l'obra *In artem analyticem isagoge* (1591), de François Viète (1540-1603), és un text clau per la utilització de símbols, no només per representar les incògnites, sinó també per representar les quantitats conegudes.[11] També es va distingir per treballar amb equacions en forma general tot creant un enllaç amb la geometria a través de la teoria de proporcions d'Euclides. Viète igualava les equacions algebraiques amb les proporcions mitjançant el producte de mitjos i extrems d'una proporció, introduint així una nova manera de treballar amb les equacions. Va donar un nou mètode per resoldre l'equació de tercer grau i per algun tipus d'equacions de quart grau. El treball de Viète va fer palesa la utilitat dels procediments algebraics per a resoldre equacions a l'aritmètica, la geometria i la trigonometria.

Entre els seguidors de Viète podem citar Pierre de Fermat (1601-1665) considerat el creador de la geometria analítica juntament amb René Descartes (1596-1650). Aquest darrer, amb la seva obra *La Géométrie* (1637), va contribuir a la resolució d'equacions de tercer i quart grau, i d'algunes concretes de cinquè i sisè grau, en estudiar la naturalesa de les corbes. Cal remarcar que en l'obra de Descartes s'introdueix la notació actual, llevat de dues variants menors: el signe d'igualtat i el quadrat. La introducció del llenguatge algebraic en la geometria va permetre la resolució de nous problemes geomètrics i/o d'altres encara no resolts.

A partir del segle XVII, es va produir el que actualment s'anomena "algebrització de les matemàtiques", que va donar origen a dues noves branques de la matemàtica que avui coneixem amb els noms de càlcul infinitesimal i geometria analítica. Aquest procés d'algebrització va ser lent i desigual, i va comportar un canvi de pensament en el camp de les matemàtiques: d'una manera de pensar quasi exclusivament geomètrica es va passar a una més algebraica.[12] Després de les aportacions de Descartes, amb la introducció de procediments algebraics dins la geometria, la resolució de les equacions s'abordava amb argumentacions geomètriques però també i, sobretot, amb demostracions algebraiques.

Al llarg del segle XVIII, els esforços varen anar dirigits a resoldre l'equació de cinquè grau (recordeu que les equacions de tercer i quart grau ja havien estat resoltes i publicades per Cardano).[13] Un dels grans estudiosos d'aquest tema va ser Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) el qual va publicar una llarga memòria, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1771), on explica un mètode per a resoldre equacions de tercer i quart grau i mostra que, amb aquest mètode, en les equacions de grau més gran que quatre no és possible expressar les solucions en termes dels seus coeficients mitjançant radicals.[14]

La idea de Lagrange és que per resoldre les equacions d'un determinat grau s'han de construir noves equacions que tinguin arrels expressables en funció de les solucions que busquem. Així va demostrar que les equacions cúbiques es resolen amb una equació de grau 3!, o sigui de grau 6, i les equacions quàrtiques es resolen amb una equació de grau 4!, o sigui de grau 24. També va demostrar que aquestes noves equacions de grau 6 i grau 24 poden ser reduïdes a equacions de grau més petit que 3 i més petit que 4, respectivament. Lagrange fa aquestes demostracions en les dues primeres seccions. En la secció tercera és on intenta aplicar aquest mètode en les equacions de grau 5. Primer troba l'equació auxiliar que s'utilitza per resoldre la de grau 5 que és de grau 5!, o sigui 120 i només la pot reduir a una de grau 6. En l'última secció que té per títol *Conclusion des réflexions précédentes, avec quelques remarques générales sur la transformation des équations et sur leur réduction ou abaissement a un moindre degré* explica:

> *Hom ha degut veure per l'anàlisi que acabem de donar els principals mètodes coneguts per a la resolució d'equacions, que aquests mètodes es redueixen tots a un mateix principi general, saber trobar funcions de les arrels de l'equació proposada, les quals siguin tals: (1) que l'equació o les equacions per a les quals elles seran donades, és a dir, on elles seran les arrels (equacions que es coneixen amb el nom de reduïdes), siguin d'un grau més petit que el de la proposada, o siguin almenys descomponibles en altres equacions d'un grau més petit que el d'ella; (2) que se'n puguin deduir fàcilment el valor de les arrels buscades.*[15]

Lagrange després d'especificar quines condicions han de verificar les funcions de les arrels buscades conclou que amb aquest mètode no pot resoldre les equacions de grau més gran que quatre.

En el segle següent, Niels Henrick Abel (1802-1829) i Paolo Ruffini (1765-1822) van demostrar la impossibiltat de resoldre per radicals una equació general de grau $n > 4$.

Évariste Galois (1811-1832) va ser qui, en la memòria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831), va resoldre completament el problema de quines equacions són resolubles mitjançant operacions algebraiques, basant-se en els treballs anteriors de Lagrange i d'Abel, entre d'altres. Era conegut en aquell moment que alguns tipus especials d'equacions (binomials i abelianes, per exemple) sí que eren resolubles per radicals. Galois no només va demostrar quines equacions (de grau qualsevol) són resolubles per radicals, sinó que en fer-ho va crear el que avui en dia anomenem "la teoria de Galois".

El treball de Galois no va ser conegut fins l'any 1846, quan Joseph Liouville (1809-1882) en va publicar una part. La teoria de Galois sobre les equacions es va reunir en el *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), llibre que va preparar Camille Jordan (1838-1922).[16]

2. El Teorema fonamental de l'àlgebra

El Teorema fonamental de l'àlgebra representa un altre dels fils conductors del desenvolupament de la teoria de les equacions algebraiques.[17] Un dels enunciats possibles per a aquest teorema afirma que "tot polinomi, amb coeficients reals, de grau n descompon en producte de factors irreductibles de grau 1 o 2 amb coeficients reals". Un altre dels enunciats possibles és que "tot polinomi de grau n admet n arrels (simples i/o múltiples, reals i/o imaginàries)".

En el procés històric de la seva aparició es poden considerar tres fases: la primera, on es formulen, sense demostració, diverses versions de l'enunciat d'aquest teorema; la segona, on s'intenta demostrar el teorema tant de manera geomètrica com analítica i la tercera, on queda demostrat el teorema dins d'una nova part de la matemàtica: l'àlgebra abstracta.

El primer intent de formulació del Teorema fonamental, sembla ser que és degut a Peter Roth (ca. 1580-1617) el qual el va enunciar a l'obra *Arithmetica philosophica* (1600).[18] Posteriorment, l'enunciat sense demostració, el podem trobar a l'obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) d'Albert Girard (1593-1692):

> *Totes les equacions algebraiques tenen tantes solucions com mostra el terme de grau més gran, exceptuant les incompletes.*[19]

Malauradament Girard hi afegeix "exceptuant de les incompletes" la qual cosa fa que no es consideri l'enunciat complet del Teorema fonamental.[20] Més tard, en el 1637, Descartes en el llibre III de *La Géométrie* especifica que pot haver-hi el mateix nombre d'arrels que el grau de l'equació i explica que seran reals i/o imaginàries:

> *Sapigueu doncs que en cada equació, tant quant la incògnita té de dimensions, tant pot haver-hi d'arrels, és a dir, tants valors d'aquesta incògnita.*[21]
>
> *Per la resta com que ni les arrels vertaderes ni les falses són sempre reals, a vegades són imaginàries; és a dir, que sempre se'n poden imaginar tantes com acabo de dir en cada equació, però a vegades no hi ha cap quantitat que correspongui a les que hom imagina.*[22]

En el segle XVIII, diversos matemàtics com Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Johann Bernoulli (1667-1748) i d'altres s'adonen de la conveniència de disposar d'una descomposició de les fraccions racionals en fraccions simples.

L'any 1702, Leibniz publicà una memòria sobre la integració de fraccions racionals en la què el mètode d'integració que s'utilitza es basa en la descomposició del denominador en producte de factors lineals, suposant, a priori, que una tal descomposició existeix (primer en el cas d'arrels simples i, més tard, fent referència al cas d'arrels múltiples).[23]

Malgrat el fet que Leibniz considera que una tal descomposició no sempre existeix, és precisament aquí on apareix per primer cop, d'una forma general i precisa, l'enunciat del Teorema fonamental de l'àlgebra: "Un polinomi a coeficients reals es pot descompondre com a producte de factors lineals o de grau dos amb coeficients reals".[24] Apreciem aquí un clar exemple de connexió, a començaments del segle XVIII, entre el càlcul infinitesimal i l'àlgebra.

Les primeres temptatives de demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra van tenir lloc en el segle XVIII; la primera demostració analítico-geomètrica la va donar Jean d'Alembert (1717-1783) l'any 1748 en la memòria titulada *Recherches sur le calcul integral.*[25] El mateix any, Leonhard Euler (1707-1783) en l'obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, en el capítol II titulat *De la transformació de les funcions*, va argumentar sobre les relacions entre el nombre d'arrels i el tipus de factors:

[. . .] Per altra banda, és clar que un factor doble comprèn dos valors simples, un factor triple, tres simples i així successivament. A més una funció entera Z de z en la qual l'exponent de la potència més gran de z sigui n contindrà n factors simples; per tot això, al mateix temps, si alguns factors fossin o bé dobles o bé triples, & c., coneixeríem el nombre de factors.[26]

29. Trobarem els factors simples de qualsevol funció entera de z si posem aquesta funció Z igual a zero i investiguem a partir d'aquesta equació totes les arrels de z: en efecte, tantes arrels com ofereixi z donaran tants factors simples de la funció Z.[27]

30. Els factors simples per tant seran reals o imaginaris; i si la funció Z tingués factors imaginaris, el seu nombre sempre seria parell.[28]

Més endavant, després d'explicar que el producte de dos factors simples imaginaris conjugats sempre dóna un factor real doble, enuncia explícitament el Teorema fonamental de l'àlgebra:

Tota funció entera de z es podrà resoldre en factors reals, simples o dobles.[29]

L'any 1751, el mateix Euler va presentar-ne una demostració a *Recherches sur les racines imaginaires des équations.*[30] Es va basar en tres lemes que va provar amb consideracions geomètriques: (1) una equació de grau senar té com a mínim una arrel, (2) una equació de grau parell o bé no té arrels reals o bé té un nombre parell d'arrels reals, i (3) una equació (mònica) de grau parell, amb terme independent negatiu, té com a mínim una arrel positiva i una arrel negativa.[31] Tot seguit, va demostrar que les equacions de quart grau sempre poden ser descompostes en dos factors reals de segon grau. En aquesta demostració Euler utilitza les tècniques de Descartes (llibre III de la *Géométrie*) per transformar l'equació de quart grau en una de sisè grau fàcilment resoluble. També va provar que les equacions de vuitè grau sempre poden ser descompostes en dos factors reals de quart grau. Finalment, va demostrar que les equacions de grau $2m$ (amb $m > 1$) sempre poden ser descompostes en dos factors reals de grau $2m - 1$ i conclou dient:

Heus aquí una demostració completa de la proposició que és usualment pressuposada en anàlisi, especialment en el càlcul integral, i que diu que cada funció racional d'una variable x *com* $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}+$ *etc. sempre pot ser resolta en factors reals, o bé simples de la forma* $x + p$, *o bé dobles de la forma* $xx + px + q$.[32]

Podem afirmar que fins aquest moment l'existència de les arrels d'un polinomi de grau n se suposava certa i, a partir de diferents transformacions, s'intentava esbrinar la seva naturalesa.[33]

La primera demostració rigorosa del Teorema fonamental de l'àlgebra és la presentada pel matemàtic Carl Friedrich Gauss (1777-1855), en la seva tesi doctoral (1799), on va demostrar, amb consideracions geomètriques, que tota equació polinòmica té com a mínim una arrel, ja siguin els seus coeficientes reals o complexos. Després, va fer encara tres demostracions més, la segona de les quals (1816) és purament algebraica, a diferència de la primera. Gauss prova que tot polinomi amb coeficients reals es pot descompondre en producte de factors lineals i quadràtics. La segona demostració de Gauss s'inicia provant alguns resultats sobre funcions enteres simètriques, com ara que els coeficients d'un polinomi que descompon completament són funcions simètriques de les seves arrels. La idea de la demostració és laboriosa, més que difícil, i es basa en la construcció d'equacions auxiliars.[34]

Posteriorment diferents matemàtics han ofert altres demostracions, algunes de les quals són, a diferència de les proposades per Gauss, de caire constructiu.

3. Consideracions finals

A partir de l'obra de Descartes, tal com hem dit, i durant un segle aproximadament, es va dur a terme el que podríem anomenar procés d'algebrització de les matemàtiques.

Aquest procés d'introducció de l'àlgebra com a part de les matemàtiques no va ser uniforme: mentre que uns pocs (els menys) l'acceptaven completament, d'altres la utilitzaven com una eina i d'altres la rebutjaven.

Segons Lagrange (1795):

> *Tant en quant l'àlgebra i la geometria han estat separades, el seu progrés ha estat lent i els seus usos limitats, però des de que aquestes ciències s'han reunit, s'han prestat forces mútues i han marxat juntes amb pas ràpid cap a la perfecció. És a Descartes que hom deu l'aplicació de l'àlgebra a la geometria, aplicació que ha esdevingut la clau dels més grans descobriments en totes les branques de les matemàtiques.*[35]

L'establiment del llenguatge algebraic com un llenguatge nou de símbols i tècniques per a resoldre problemes nous mereix una consideració apart. De fet, ja a l'obra de Viète es va fer palès l'avantatge de la utilització de símbols per a representar les quantitats conegudes i les incògnites. Tot i amb això, aquest nou llenguatge no va ser acceptat de forma unitària. Cal remarcar, doncs, la importància de l'aparició del llenguatge simbòlic i la rellevància d'aquest fet en el progrés posterior de les matemàtiques.

La introducció de l'àlgebra dins la geometria va obligar a un replantejament dels límits disciplinaris de les ciències matemàtiques a nivell terminològic i, sobretot, a nivell metodològic, que es va traduir en un establiment de noves línies divisòries entre les diferents branques de la matemàtica.

Francis Bacon (1561-1626) va presentar una classificació de les ciències diferent de la divisió clàssica en set arts liberals agrupades en el trivium i el quadrivium. Dividia la matemàtica en pura i mixta, i la pura en aritmètica i geometria[36] (observeu que l'àlgebra no apareix com una branca separada). Aquesta classificació va ser recollida pels enciclopedistes francesos en el segle posterior. Així, en la classificació de les matemàtiques presentada per d'Alembert (1754) l' àlgebra apareixia com una part de l'aritmètica i aquesta formava, junt amb la geometria, la matemàtica pura. A més, hi considerava les matemàtiques mixtes (dividides en mecànica, astronomia geomètrica, òptica, acústica, pneumàtica i art de conjecturar) i les físicomatemàtiques.

L'any 1862, Marie-Nicolas Bouillet (1798-1864) autor d'un *Diccionari universal de la Ciència, les Lletres i les Arts*, presenta una divisió de les ciències en què ja es considera l'àlgebra una de les tres branques dins de les matemàtiques pures, essent l'aritmètica i la geometria les altres dues.

De fet, durant el segle XIX, l'àlgebra va sofrir una profunda transformació arran del treball de Galois, en el què és clau la teoria de grups, tot i que aquest és un concepte que ell no defineix en cap moment. Lagrange ja fa palès que el problema de la resolució d'equacions per radicals requereix el coneixement dels subgrups del grup de permutacions de les seves arrels.

Els conceptes de cos i d'extensió de cossos també es troben ja en el treball de Galois i d'Abel, tot i que va ser Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) qui va introduir aquesta terminologia. Els conceptes d'anell i d'ideal són presents en els treballs de Dedekind i Leopold Kronecker (1823-1891), tot i que el nom d'anell va ser introduït posteriorment per David Hilbert (1862-1943).

La teoria d'anells i ideals va ser axiomatitzada i sistematitzada per Emmy Noether (1882-1935) qui, a més de les seves contribucions a la física teòrica, va establir les bases del que avui coneixem com a "àlgebra moderna". En particular, va introduir els conceptes d'anell, ideal, mòdul, i va obtenir diversos resultats rellevants, bàsics en la disciplina de l'àlgebra commutativa. En la darrera etapa de la seva vida, es va endinsar també en l'àlgebra no commutativa. Malgrat la significació dels seus resultats, la seva més gran aportació és potser l'enfocament axiomàtic, on els conceptes es prioritzen sobre els càlculs.

Així, el mètode axiomàtic en l'àlgebra, va ser establert aproximadament 2000 anys després que Euclides introduís aquest mètode en la geometria (en els seus *Elements*). La introducció de nous elements i la ulterior abstracció ha permès l'aplicació de l'àlgebra no només en altres àrees de les matemàtiques sinó també en altres disciplines. La teoria de grups és una de les branques més importants en la matemàtica moderna amb la qual han estat vinculats els avenços en anàlisi, geometria, física teòrica, mecànica, etc. Per exemple, la primera aplicació en la física va ser la classificació de cristalls (1890) i, avui dia, juga un paper clau en la física quàntica, de manera que Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958), un dels seus creadors, va afirmar que "la teoria de grups és una de les eines més poderoses en la física moderna".

Notes

[1] Per una visió de perspectiva podeu consultar Van der Waerden (1980) i Bashmakova-Smirnova (2000).

[2] Sobre la matemàtica babilònica vegeu Hoyrup (2002) i Caveing (1994).

[3] Vegeu la Proposició 6 del llibre II dels *Elements*. Euclides (1956), p. 385.

[4] Vegeu la classificació i les regles a Al-Khwarizmi (1986), pp. 8-9. Per una perspectiva més general sobre l'àlgebra en la ciència àrab vegeu Català (1981).

[5] Més informació a Sigler (2002), pp. 554-615.

[6] Al Centro Studi della Mathematica Medioevale de la Universitat de Siena s'està portant a terme l'edició dels tractats algebraics d'aquest període amb l'ànim de fer possible una història més completa de l'àlgebra. Vegeu Franci, R.-Toti Rigatelli, L. (1985).

[7] Sembla que va ser Niccolò Tartaglia (ca. 1500-1557) qui va resoldre per primer cop l'equació de tercer grau i li va comunicar a Cardano el qual la va publicar sense el seu permís.

[8] Cardano analitza tots els casos d'equació cúbica completa, transformant cada equació en una de nova sense el terme quadrat, dóna un exemple numèric per a cada cas i prova geomètricament la validesa de la solució. Vegeu la resolució de l'equació de grau 3 a Cardano (1968), pp. 96-101.

[9] Els nombres complexos representen una eina bàsica i apareixen, no només en la pròpia matemàtica, sinó també en en la física. Més concretament, un moviment oscil·latori sinusoïdal (com és ara el de balanceig d'un pèndol) s'analitza utilitzant els nombres complexos; també en enginyeria elèctrica, en estudiar el corrent altern, per exemple, en l'estudi de les funcions oscil·latòries en la mecànica quàntica. Així, els nombres complexos resulten ser l'eina ideal per a estudiar fenòmens reals.

[10] Sobre Bombelli, podeu consultar Bombelli (1929). La representació geomètrica dels nombres complexos, i la interpretació geomètrica de les operacions entre ells, va ser clau per a la seva acceptació. Entre els matemàtics que podem destacar en aquesta línia estan John Wallis (1616-1703), Caspar Wessel (1795-1818) i Jean Robert Argand (1768-1822). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) va observar que, en fer qualsevol operació amb nombres complexos, incloses potències i arrels, el resultat és altre cop un nombre complex. Leonhard Euler (1707-1783) va ser qui va introduir la notació "i" per a designar $\sqrt{-1}$, i va establir una relació entre els nombres complexos i les funcions transcendentals, a partir de les fórmules obtingudes per Roger Cotes (1682-1716). Paral·lelament, Abraham de Moivre (1667-1754) va obtenir les arrels n-èsimes d'un nombre complex qualsevol i la fórmula que porta el seu nom. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va sistematitzar el seu ús i va introduir la nomenclatura de "nombre complex". El seu tractament els va fer adquirir una autonomia pròpia.

[11] Sobre aquesta obra de Viète, peça clau dins la història de l'àlgebra, vegeu la traducció anglesa de Witmer (1983).

[12] Alguns autors van adoptar les tècniques algebraiques en la seva obra i, a la vegada, varen intentar justificar-les i transformar-les d'acord amb la matemàtica clàssica. Altres, malgrat conèixer l'existència d'aquests procediments, els van considerar aliens al pensament matemàtic i fins i tot els refusaven i, per últim, uns pocs, acceptaven aquesta nova manera de pensar com un complement més pel desenvolupament de les seves tècniques matemàtiques. Vegeu Massa (2001), p. 708 i Mahoney, M. S. (1980), pp. 141-155 .

[13] Més informació a Toti Rigatelli (1994).

[14] Alexandre-Théofile Vandermonde (1736-1796) a *Memoir on the solution of equations* va arribar a conclusions anàlogues, si bé el seu treball no va ser considerat fins el segle XX. Vegeu Bashmakova-Smirnova (2000), pp. 103-106.

[15] *"86. On a dû voir par l'analyse que nous venons de donner des principales méthodes connues pour la résolution des équations, que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles: 1º que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données, c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré*

moindre que celui-là; 2º que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées." Lagrange (1867-1892), p. 355.

[16] Vegeu Van der Waerden (1980), pp. 112-117 i Bashmakova-Smirnova (2000), pp. 115-127.

[17] Per explicar l'evolució i les demostracions del Teorema Fonamental de l'àlgebra emprarem l'article de Josep Pla i Carrera (1992) i de Christian Gilain (1991). Cal remarcar que Gilain distingeix entre el teorema fonamental de l'àlgebra (TFA) i el teorema de factorització lineal (TFL). Segons Gilain, el TFL apareix com a lema dins de les demostracions algebraiques del TFA, però pot no tenir-se en compte en les demostracions analítiques. Gilain (1991), p. 93.

[18] Vegeu Pla (1992), p. 883.

[19] *"Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, excepté les incomplètes."* Gilain (1991), p. 93.

[20] A més, tampoc no apareix de forma explícita de quin tipus han de ser aquestes solucions: no deixa clar si són complexes, sinó que, utilitzant el llenguatge algebraic actual, aquestes podrien estar en una extensió algebraica del cos dels nombres complexos.

[21] *"Scachés donc qu'en chaque Équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité"*. Descartes (1637), p. 372.

[22] *"Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires; c'est-à-dire, qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine"*. Descartes (1637), p. 380.

[23] També apareix publicada, l'any 1704, una memòria de Johann Bernoulli que tracta el mateix problema de càlcul integral, on el mètode proposat és també la descomposició de les fraccions racionals en suma de fraccions simples. Trobareu més informació a Gilain (1991), pp. 97-101 i a Pla (2002), pp. 887-893.

[24] De fet, atès que Leibniz considera que aquesta descomposició no és certa per a tots els polinomis, no es pot considerar estrictament com l'enunciat del Teorema fonamental de l'àlgebra.

[25] Gilain en el seu article presenta en un annex una transcripció del primer text de d'Alembert del 1745 sobre el Teorema fonamental de l'àlgebra. Vegeu Gilain (1991), pp. 133-136.

[26] *"Perspicuum autem est Factorem duplicem duos complecti valores simplices, Factorem triplicem tres simplices, & ita porro. Hinc Functio ipsius z integra, in qua exponens summae potestatis ipsius z est = n, continebit n Factores simplices; éx quo simul, si qui Factores fuerint vel duplices vel triplices, & c. Numerus Factorum cognoscetur."* Euler (1748), ed. 2000, p. 17.

[27] *"29. Factores simplices Functionis cuiuscunque integra Z ipsius z reperiuntur, si Functio Z nihilo aqualis ponatur, atque ex hac aequatione omnes ipsius z radices investigentur: singula enim ipsius z radices dabunt totidem Factores simplices Functionis Z."* (Ibid, p. 17).

[28] *"30. Factores simplices ergo erunt vel reales, vel imaginarii; & , si Functio Z habeas Factores imaginarios eorum numerus semper erit par."* (Ibid, p. 18).

[29] *"Hinc omnis Functio integra ipsius z resolvi poterit in Factores reales vel simplices vel duplices."* (Ibid, p. 19).

[30] Lagrange va completar la demostracióó d'Euler.

[31] Vegeu Struik (1969), pp. 99-102.

[32] A Struik (1969), p. 102, llegim: *"Scholium. We thus have here a complete demonstration of the proposition, which is usually presupposed in analysis, especially in the integral calculus, and which claims that every rational function of a variable x as $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}+$ etc. can always be resolved into real factors, either simple ones of the form x + p, or double ones of the form $xx + px + q$."*

[33] En aquest sentit es podria afirmar que les demostracions del Teorema Fonamental fins aquí esmentades són demostracions "parcials".

[34] Vegeu les demostracions donades per Gauss a Van der Waerden (1980), pp. 95-102.

[35] *"Tant que l'Algèbre et la Géometrie on été séparées, leur progrès ont été lents et leurs usages bornés mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prété des forces mutuelles et on marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre a la Géometrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques". Oeuvres* (1795), vol. VII, p. 271.

[36] La matemàtica mixta la dividia en perspectiva, música, astronomia, cosmografia, arquitectura i diverses més. Vegeu C. Puig (2002), p. 152.

BIBLIOGRAFIA

AL-KHWARIZMI (1986), The Algebra of Mohammed ben Musa, Rosen, F. (ed. i trad.), (1era ed. Londres, 1831), Hildesheim, Zürich, Nova York, Georg Olms Verlag.

BASHMAKOVA-SMIRNOVA (2000), The Beginnings and Evolution of Algebra, traduït del rus per Abe Shenitzer, The Mathematical Association of America, United States of America.

BOMBELLI, R. (1929), Algebra, edició de Bortolotti, Milano, Feltrinelli.

CATALA, M. A. (1981), "El nacimiento del álgebra", dins de Historia de la ciencia árabe, J. Vernet (ed.), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, pp. 23-37.

CAVEING, M. (1994), Essai sur le savoir Mathématique. Dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes, Lille, Presses Universitaires de Lille.

CARDANO, G. (1968), The Great Art or the Rules of Algebra. Witmer, T. Richard (ed., trans.), Cambridge, Mass., & London: M. I. I. Press.

DESCARTES, R. (1954), The geometry of René Descartes. D. E. Smith & M. L. Latham (ed., trans.), Nueva York, Dover.

EUCLIDES, (1956), The Elements, edició anglesa de T. L. Heath, vol. 1, Nova York, Dover.

EULER, L. (2000), Introductio in Analysin Infinitorum, Arantegui, J. L. i Durán, A. J. Trad i anot, Sevilla, SAEM "Thales".

FRANCI, R.-TOTI RIGATELLI, L. (1985), "Towards a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", Janus 72, pp. 17-82.

GILAIN, C. (1991), "Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral", Archive for History of Exact Sciences (AHES) 42, pp. 91-136.

HOYRUP, J. (2002), Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin, Nova York, Springer-Verlag.

KLINE, M., (1972), Mathematical Thought from Ancient to Modern Time, Nova York, Oxford University Press.

LAGRANGE, J. L. (1867-1892), Réflexions sur la résolution algébrique des équations, a Oeuvres, vol. 3., París, pp. 205-421.

MAHONEY, M. S. (1980), "The beginnings of algebraical thought in the Seventeenth century", Descartes'philosophy, mathematics and physics, Gaukroger, S., ed., Totowa/Brighton, Barnes and Noble/Harvester, pp. 141- 156.

MASSA ESTEVE, M. R. (2001), "Las relaciones entre el álgebra y la geometria en el siglo XVII", LLULL, vol. 24, pp. 705-725.

PARSHALL, K. H. (1988), "The art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of ideas", History of Science, 26, pp. 129-164.

PLA, J., (2002) The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss. Publicacions matemàtiques, vol. 36, pp. 879-911.

PUIG-PLA, C. (2002), "Sobre el significat del concepte matemàtiques : matemàtiques pures i mixtes en els segles XVIII i XIX", Actes de la VI Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Barcelona, pp. 151-169.

SIGLER, L. E. (2002), Fibonacci's Liber Abaci, A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer.

SMITH, D. E., (1959), A source book in Mathematics, Dover, Nova York, pp. 292-310.

STRUIK, D. (ed.) (1969), A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Cambridge, Mas: Harvard University Press.

TOTI RIGATELLI, L. (1994), "The theory of equations from Cardano to Galois, 1540-1830", a Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, vol. 1, Grattan-Guinnes, I.,(ed.), Londres i Nova York, Routledge, pp. 713-721.

VIÈTE, F. (1983), The Analytic Art. T.R. Witmer (tr.), Kent, Ohio, Kent State University Press.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1980), A History of Algebra. From Al-khwarizmi to Emmy Noether, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.

Capítol 1

Estructures algebraiques

1.1 Introducció

(Extret de *Entorn del desenvolupament històric de les equacions algebraiques.* Vegeu el text complet en la introducció històrica).

En els seus inicis, l'àlgebra es va ocupar de problemes d'índole pràctica i, especialment en el Renaixement, de la resolució i classificació d'equacions, en què *la utilització de símbols per a representar les quantitats conegudes i les incògnites resultava molt aventatjós.*
A partir de l'obra de Réné Descartes (1596-1650), i durant un segle aproximadament, es va dur a terme el que podríem anomenar un procés d'algebrització de les matemàtiques.
La teoria dels cossos commutatius es deriva del que ha estat l'objecte fonamental de l'àlgebra fins a mitjans del segle XIX: l'estudi de la resolució de les equacions algebraiques.
Durant el segle XIX, l'àlgebra va sofrir una profunda transformació arran del treball d'Évariste Galois (1811-1832), en el que és clau la teoria de grups. També el concepte de cos es troba en el seu treball, així com en els de Niels Henrick Abel (1802-1829).
Va ser Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) qui va introduir la terminologia de "cos". Els conceptes d'anell i ideal són presents en els seus treballs i en els de Leopold Kronecker (1823-1891), tot i que el nom d'anell va ser introduït posteriorment per David Hilbert (1862-1943).
La teoria d'anell i ideals va ser axiomatitzada i sistematitzada per Emmy Noether (1882-1935). L'enfocament axiomàtic és, potser, la seva més gran aportació.
El mètode axiomàtic en l'àlgebra, doncs, va ser introduït aproximadament 2000 anys després que Euclides introduís aquest mètode en la geometria (en els seus *Elements*). La introducció de nous elements i la ulterior abstracció ha permès l'aplicació de l'àlgebra no només en altres àrees de les matemàtiques sinó també en altres disciplines. La teoria de grups és una de les branques més importants en la matemàtica moderna amb la qual han estat vinculats els avenços en anàlisi, geometria, física teòrica, mecànica, etc. Per exemple, la primera aplicació en la física va ser en la classificació de cristalls (1890) i, avui dia, juga un paper clau en la física quàntica, de manera que Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958), un dels seus creadors, va afirmar que "la teoria de grups és una de les eines més poderoses en la física moderna".

1.2 Grups

Definició. Diem que un conjunt G és un grup quan en G hi ha definida una operació interna (que podem denotar amb el símbol $*$) que compleix les propietats següents:

1. Existeix $e \in G$ tal que $\forall\, x \in G$ és $x * e = e * x = x$.

2. $\forall\, x \in G$ existeix $-x \in G$ tal que $x * (-x) = (-x) * x = 0$.

3. $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in G$.

Si, a més, compleix la condició:

4. $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in K$

es diu que el grup és commutatiu.

Exemples

L'exemple potser més senzill de grup commutatiu és el constituït pel conjunt dels nombres enters amb la suma.

També el conjunt dels nombres racionals amb la suma és un grup (commutatiu). I el conjunt dels nombres racionals diferents de zero amb el producte. Observeu que el conjunt dels nombres enters diferents de zero amb el producte no és grup.

Hi ha molts altres exemples. Així podem considerar el conjunt de totes les permutacions del conjunt $C_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ (recordeu que una *permutació* de C_n és una aplicació bijectiva

$$\begin{array}{rcll} s : C_n & \longrightarrow & C_n & \\ i & \longmapsto & s(i) & \qquad 1 \le i \le n \end{array}$$

Aquest conjunt l'indicarem per S_n. Amb la composició habitual d'aplicacions entre conjunts, S_n és un grup, però no és commutatiu, com és fàcil comprovar. Considerem, per exemple, les permutacions

$$\begin{array}{rccc} s_1 : & C_3 & \longrightarrow & C_3 \\ & 1 & \longrightarrow & 1 \\ & 2 & \longrightarrow & 3 \\ & 3 & \longrightarrow & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} s_2 : & C_3 & \longrightarrow & C_3 \\ & 1 & \longrightarrow & 3 \\ & 2 & \longrightarrow & 1 \\ & 3 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

Llavors:

$$\begin{array}{rccc} s_1 \circ s_2 : & C_3 & \longrightarrow & C_3 \\ & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & 2 & \longrightarrow & 1 \\ & 3 & \longrightarrow & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} s_2 \circ s_1 : & C_3 & \longrightarrow & C_3 \\ & 1 & \longrightarrow & 3 \\ & 2 & \longrightarrow & 2 \\ & 3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

i clarament $s_1 \circ s_2$ i $s_2 \circ s_1$ són aplicacions diferents.

1.3 Anells

Definició. Diem que un conjunt A és un anell en A hi ha definides dues operacions internes (que podem anomenar suma i producte) que compleixen les propietats següents:

1. $x + y = y + x\,,\ \forall\, x, y \in A$

2. Existeix $0 \in A$ tal que $\forall\, x \in A$ és $x + 0 = 0 + x = x\,.$

3. $\forall\, x \in A$ existeix $-x \in A$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0\,.$

4. $(x + y) + z = x + (y + z)\,,\ \forall\, x, y, z \in A\,.$

5. $(xy)z = x(yz)\,,\ \forall\, x, y, z \in A\,.$

6. $1x = x\,,\ \forall\, x \in A\,.$

7. $(x + y)z = xz + yz$ i $z(x + y)z = zx + zy\,,\ \forall\, x, y, z \in A\,.$

És a dir, que el conjunt A amb la suma és un grup commutatiu.
Quan, a més, es compleix la condició:

8. $xy = yx\,,\ \forall\, x, y \in K\,.$

es diu que l'anell és commutatiu.

Exemples
Com a primer exemple d'anell podem considerar el del conjunt dels nombres enters amb la suma i el producte. Un altre exemple d'anell commutatiu és el del conjunt dels polinomis amb coeficients reals o racionals dels què es tracta en el capítol 2.
Anem a continuació a veure'n un altre diferent.
Donat $m \in \mathbb{Z}$ fix, i $x, y \in \mathbb{Z}$ qualssevol, es diu que aquests dos nombres enters són congruents mòdul m, i ho indicarem per $x \equiv y$ (mod. m), quan la diferència $x - y$ sigui un múltiple de m. Aleshores, per a cada nombre enter x, posarem $[x]$ al conjunt format per tots els nombres enters que són congruents amb ell. Anomenarem a aquest consunt "classe de x". I posarem $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ al conjunt format per aquestes classes.
A $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ definirem les operacions de suma i de producte de la manera següent:

(a) $[x] + [y] = [x + y]\,,\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}\,.$

(b) $[x][y] = [xy]\,,\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}\,.$

És fàcil comprovar que aquestes operacions estan ben definides.
Per exemple, obtenim les taules següents quan $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$ i $m = 6$:

$m = 2$

+	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

·	[0]	[1]
[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]

$m = 3$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[1]$

$m = 4$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[0]$	$[2]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

$m = 5$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[1]$	$[3]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[1]$	$[4]$	$[2]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

$m = 6$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[5]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$
$[5]$	$[0]$	$[5]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Per a tot m, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ és un anell commutatiu.
Observeu que en el cas $m = 4$ i $m = 6$ hi ha el que s'anomenen divisors de zero (és a dir, a vegades $[x][y] = [0]$ malgrat que $[x] \neq [0]$ i $[y] \neq [0]$) i que els elements que no són divisors de zero són els elements $[x]$ amb x un enter primer amb m. En canvi, en els casos $m = 2$, $m = 3$ i $m = 5$, no hi ha divisors de zero.

1.4 Cossos

Definició. Diem que un conjunt K és un cos commutatiu quan en K hi ha definides dues operacions internes (suma i producte) que compleixen les propietats següents:

1. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in K$.

2. Existeix $0 \in K$ tal que $\forall x \in K$ és $x + 0 = 0 + x = x$.

3. $\forall x \in K$ existeix $-x \in K$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

4. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in K$.

5. $(xy)z = x(yz)$, $\forall\, x, y, z \in K$.

6. $1x = x$, $\forall\, x \in K$.

7. $(x + y)z = xz + yz$, $\forall\, x, y, z \in K$.

8. $xy = yx$, $\forall\, x, y \in K$.

9. $\forall\, x \in K$, $x \neq 0$, existeix $x^{-1} \in K$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

És a dir, els cossos commutatius són anells commutatius on qualsevol element diferent de zero té invers respecte del producte.

Exemples.
Són exemples de cossos commutatius els conjunts dels nombres racionals i dels nombres reals. També és un cos commutatiu el conjunt dels nombres complexos, dels què es tracta en el capítol 1.

Tots aquests cossos tenen infinits elements, però també hi ha cossos finits. En aquest cas al nombre d'elements que tenen se li diu l'*ordre* del cos.

Segons va demostrar el matemàtic del segle XIX Évariste Galois, una condició necessària i suficient per a que existeixi un cos finit de q elements és que q sigui potència d'un nombre primer. En aquest cas, la notació que habitualment s'utilitza per designar un cos de q elements és $\mathbb{F}_q$.

Dels anells de la forma $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, dels què hem parlat en la secció anterior, alguns són cossos.

En les taules exposades en la secció anterior, per a diferents valors de m, s'aprecia que el conjunt dels elements que no són divisors de zero: els elements $[x]$ tals que x i m no són primers entre si, coincideix amb el conjunt dels elements que són invertibles a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. És a dir, donada una classe $[x] \neq [0]$, amb x i m primers entre si, existeix $[y]$ tal que $[x][y] = [1]$. En particular, quan m és un nombre primer ($m = 2, 3, 5, \dots$) tots els elements $[x] \neq [0]$ són invertibles.

En resum, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ és un cos si, i només si, $m = p$ és un nombre primer. En aquest cas, es verifica que $p[1] = [0]$ i llavors direm que p és la característica del cos. Els cossos finits d'aquesta forma s'anomenen *cossos primers*.

1.5 Espais vectorials

Diem que un conjunt E és un espai vectorial sobre un cos commutatiu K si tenim definida una operació interna (suma) en E i una operació externa (producte per escalars) que compleixen:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\, x, y, z \in E$.

2. Existeix $0 \in E$ tal que $\forall\, x \in E$ és $x + 0 = 0 + x = x$.

3. $\forall\, x \in E$ existeix $-x \in E$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

4. $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in E$.

5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, x, y \in E$.

6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $\forall\, x \in E$.

7. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $\forall\, x \in E$.

8. $1x = x$, $\forall\, x \in E$.

Els elements d'E s'anomenen vectors.

Els espais vectorials es tracten en el primer capítol del llibre "Espais vectorials. Aplicacions lineals. Diagonalització". A continuació s'adjunta un breu resum d'alguns dels conceptes bàsics en la teoria d'espais vectorials.

Un subconjunt no buit F de E es diu que és un subespai vectorial de E si

1. donats dos vectors $x, y \in F$ qualssevol, aleshores $x + y \in K$, i

2. donats un vector $x \in F$ i un escalar $\lambda \in K$ qualssevol, aleshores $\lambda x \in F$.

Observeu que en el cas en què K és un cos infinit, tot subespai vectorial, o bé és $\{0\}$, o bé té infinits vectors. En canvi, els subespais vectorials sobre cossos finits tenen un nombre finit de vectors.

Una combinació lineal dels vectors $u_1, \ldots, u_m$ de E és tot vector de la forma $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$ amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$.

Donats els vectors $u_1, \ldots, u_m$, indicarem per $[u_1, \ldots, u_m]$ el conjunt format amb totes les combinacions lineals d'aquests vectors. Aquest conjunt és un subespai vectorial i està contingut en tot subespai vectorial que contingui els vectors $u_1, \ldots, u_m$.

Un conjunt de vectors $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de E es diu que és linealment dependent si existeix una combinació lineal d'ells $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$, amb no tots els escalars nuls, que és el vector 0. En cas contrari, es diu que és linealment independent.

Diem que una família de vectors $u = (u_1, \ldots, u_m)$ és una base d'un subespai vectorial F si és linealment independent i $[u_1, \ldots, u_m] = F$. Llavors qualsevol altra base de F té també m vectors. Es diu que m és la dimensió de F.

Si el cos K té q elements, un subespai vectorial de dimensió m consta de q^m vectors.

Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ és una base de E, per a tot vector x de E existeixen n escalars $x_1, \ldots, x_n$ únics tals que $x = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$. Aquests escalars $x_1, \ldots, x_n$ s'anomenen les components de x en la base u.

Exemples.

Són exemples d'espais vectorials, entre d'altres, els següents:

- El conjunt dels vectors del pla amb les operacions de suma i producte per escalars habituals.
- El conjunt dels vectors de l'espai real amb les operacions de suma i producte per escalars habituals.

- El conjunt de les successions de nombres reals amb les operacions de suma i producte per un escalar real habituals.
- $\mathbb{R}[t]$, el conjunt dels polinomis amb coeficients reals amb les operacions habituals de suma de polinomis i producte per escalars de $\mathbb{R}$, és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ (recordeu que el capítol 2 està dedicat als polinomis amb coeficients en un cos commutatiu).
- $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, el conjunt de les matrius de m files i n columnes amb coeficients en un cos commutatiu K, amb la suma i el producte per escalars de K habituals, és un espai vectorial sobre K (el primer apartat del capítol 3 està dedicat a les matrius).

Capítol 2

Nombres complexos

2.1 Introducció

(Extret de *Entorn del desenvolupament històric de les equacions algebraiques*. Vegeu el text complet en la introducció històrica).

Els nombres complexos representen una eina bàsica i apareixen, no només en la pròpia matemàtica, sinó també en en la física. Més concretament, un moviment oscil·latori sinusoïdal (com és ara el de balanceig d'un pèndol) s'analitza utilitzant els nombres complexos; també en enginyeria elèctrica, en estudiar el corrent altern, per exemple, on en l'estudi de les funcions oscil·latòries en la mecànica quàntica. Així, els nombres complexos resulten ser l'eina ideal per a estudiar fenòmens reals.

Aquests matemàtics, en resoldre equacions, es troben amb l'aparició d'arrels quadrades de nombres negatius, ja que aquestes apareixen en la fórmula de la solució general de les equacions de tercer grau. Potser aquí és on sorgeix la necessitat d'operar amb els que avui anomenem *nombres complexos*.

Bombelli a l'*Algebra* introdueix els nombres complexos, amb una terminologia específica: anomena pdm ("più di meno") a $\sqrt{-1}$ i mdm ("meno di meno") a $-\sqrt{-1}$, i dóna les regles fonamentals per operar amb ells.

La representació geomètrica dels nombres complexos, i la interpretació geomètrica de les operacions entre ells, va ser clau per a la seva acceptació. Entre els matemàtics que podem destacar en aquesta línia estan John Wallis (1616-1703), Caspar Wessel (1795-1818) i Jean Robert Argand (1768-1822).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) va observar que, en fer qualsevol operació amb nombres complexos, incloses potències i arrels, el resultat és altre cop un nombre complex. Leonhard Euler (1707-1783) va ser qui va introduir la notació "i" per a designar $\sqrt{-1}$, i va establir una relació entre els nombres complexos i les funcions transcendentals, a partir de les fórmules obtingudes per Roger Cotes (1682-1716). Paral·lelament, Abraham de Moivre (1667-1754) va obtenir les arrels n-èsimes d'un nombre complex qualsevol i la fórmula que porta el seu nom.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va sistematitzar el seu ús i va introduir la nomenclatura de "nombre complex". El seu tractament els va fer adquirir una autonomia pròpia.

2.2 Nombre complex. Formes exponencial i polar

Notem i a una solució de l'equació $x^2+1=0$, és a dir, $i=\sqrt{-1}$. Considerem el conjunt format pels nombres de la forma $a+bi$, amb a i b nombres reals. Definim en aquest conjunt les operacions suma i producte de la manera següent:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(c+d)i$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Amb aquestes operacions el conjunt

$$\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

és un cos. Un element d'aquest conjunt rep el nom de nombre complex.
A més, amb el producte:

$$\lambda(a+bi)=(\lambda a)+(\lambda b)i \quad \text{per a tot} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

$\mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió dos. (Per aprofundir en la noció d'espai vectorial sobre un cos commutatiu K es pot consultar qualsevol text d'àlgebra lineal, per exemple, el dels mateixos autors titulat *Espais vectorials. Aplicacions lineals. Diagonalització.*)
Donat un nombre complex $z=a+bi$, s'anomena conjugat de z al nombre $a-bi$ i el notem per $\overline{z}$.
Es verifiquen les propietats següents:

1. $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z}'$, $\quad \forall\, z,z'\in\mathbb{C}$.
2. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z}'$, $\quad \forall\, z,z'\in\mathbb{C}$.
3. $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$, $\quad \forall\, z\in\mathbb{C}$.
4. $z=\overline{z}\Longleftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Donat un nombre complex $z=a+bi$ s'anomena mòdul de z a $\sqrt{a^2+b^2}$ i el notem $|z|$.
El mòdul d'un nombre complex verifica les propietats següents:

1. $|z|\in\mathbb{R}$ i $|z|\geq 0$, $\quad \forall\, z\in\mathbb{C}$.
2. $|z|=0\Longleftrightarrow z=0$
3. $|z+z'|\leq|z|+|z'|$
4. $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$

L'invers d'un nombre complex $z=a+bi$ és:

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Tot nombre $z = a + bi$ es pot representar geomètricament com un vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Llavors $|z|$ és la distància de l'extrem d'aquest vector a l'origen de $\mathbb{R}^2$. Pensat així, $\frac{z}{|z|}$ és un vector de mòdul 1 amb la qual cosa tenim l'existència d'un angle θ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

A aquest angle θ se l'anomena argument de z, i notem arg $(z) = \theta$. Es verifiquen les propietats següents:

1. $\arg\,(z \cdot z') = \arg\,(z) + \arg\,(z')$.

2. $\arg\,\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg\,(z)$.

El nombre z el podem escriure com

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}\,.$$

L'expressió $|z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$ per designar el nombre complex z s'anomena forma trigonomètrica de z, i $|z|e^{i\theta}$ s'anomena forma exponencial del nombre complex z. També és freqüent la notació $|z|_\theta$ que rep el nom de forma polar del nombre z. A la notació habitual $a + bi$ se li diu expressió binòmica de z. Diem part real de z a a i part imaginària de z a b. Ho notem Re $(z) = a$, Im $(z) = b$.

2.2.1 Problemes resolts

1. Donat $z = a + bi$, trobeu les parts reals i imaginàries dels nombres:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{(z+1)^2}\,, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \frac{z-1}{z}\,.$$

Resolució.

a) Com que $z = a+bi$, tenim $(z+1)^2 = ((a+1)+bi)^2 = [(a+1)^2-b^2]+2(a+1)bi$. El conjugat de $(z+1)^2$ és doncs:

$$\overline{(z+1)^2} = [(a+1)^2 - b^2] - 2(a+1)bi$$

I el quadrat del mòdul de $(z+1)^2$ és:

$$\begin{aligned} |(z+1)^2|^2 &= (z+1)^2\overline{(z+1)^2} = [(a+1)^2 - b^2]^2 + [2(a+1)b]^2 = \\ &= (a+1)^4 + b^4 - 2(a+1)^2b^2 + 4(a+1)^2b^2 = \\ &= (a+1)^4 + b^4 + 2(a+1)^2b^2 = [(a+1)^2 + b^2]^2 \end{aligned}$$

D'on finalment:

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{\overline{(z+1)^2}}{|(z+1)^2|^2} = \frac{(a+1)^2 - b^2}{[(a+1)^2 + b^2]^2} - \frac{2(a+1)b}{[(a+1)^2 + b^2]^2}i\,.$$

Així obtenim:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right) = \frac{(a+1)^2 - b^2}{[(a+1)^2+b^2]^2}$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right) = \frac{-2(a+1)+b}{[(a+1)^2+b^2]^2}$$

b) Tenim $z-1=(a-1)+bi$, $\overline{z}=a-bi$, d'on:

$$\frac{z-1}{z} = \frac{(z-1)\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{(a-1)a+b^2+[ab-b(a-1)]i}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-a+bi}{a^2+b^2}$$

Finalment:

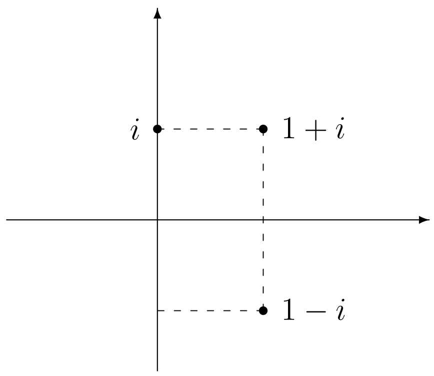
$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{a^2+b^2-a}{a^2+b^2}$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

• • •

2. Representeu geomètricament i expresseu en forma exponencial els nombres complexos següents:

(a) i. (b) $1-i$. (c) $1+i$.

Resolució. Primer representem geomètricament aquests nombres:



Per a trobar la forma exponencial d'un nombre complex z hem de calcular el mòdul de z i el seu argument, és a dir, l'angle θ tal que $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.

a) Per a $z=i$ tenim $|z|=1$ i, donat que $\cos\theta=0$ i $\sin\theta=1$, l'angle θ buscat, és a dir, l'argument de z, és $\theta=\pi/2$. Així doncs, la forma exponencial de $z=i$ és $e^{i\pi/2}$.

b) Si $z=1-i$, aleshores $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Ara hem de buscar θ tal que

$$\frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\theta + i\sin\theta\,.$$

És a dir, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, d'on $\theta = \frac{-\pi}{4}$.

Finalment, la forma exponencial de $z = 1 - i$ és $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

c) Per $z = 1 + i$ fem el mateix que abans i tenim $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, d'on la forma exponencial de $z = 1 + i$ és $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

• • •

3. Escriviu en forma binòmica els nombres complexos següents expressats en forma exponencial

(a) $2e^{i\pi/3}$. (b) $e^{-\pi i/2}$. (c) $4e^{\pi i}$.

Resolució.

a) Ens demanen trobar a i b tals que $z = a + bi$, essent $|z| = 2$ i $\arg(z) = \pi/3$. O sigui:

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

D'on l'expressió binòmica que busquem és $z = 1 + \sqrt{3}i$.

b) En aquest cas, $|z| = 1$ i $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$. Tenim doncs:

$$\frac{z}{|z|} = z = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -i\,.$$

O sigui, $z = -i$ és la forma binòmica que buscàvem.

c) En aquest últim cas $|z| = 4$ i $\arg(z) = \pi$. Tenim doncs:

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1\,,$$

d'on $z = -4$.

2.2.2 Problemes proposats

1. Expresseu en forma binòmica els nombres complexos següents:

(a) $\dfrac{1+i}{1-i}$. (b) $\dfrac{(1-i)(3+i)}{(1-2i)}$.

Solució. (a) i. (b) $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$.

2. Demostreu les igualtats següents per a z, z' nombres complexos qualssevol:

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z)$$
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

3. Trobeu els $z \in \mathbb{C}$ tals que $\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(\text{Im } z)^2} i$.

Solució. $z = \frac{-3}{2} - \frac{1}{2}i; \qquad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2.3 Potències i arrels d'un nombre complex

La fórmula de Moivre ens diu:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

d'on tenim que, donat un nombre complex z, la seva potència n-èsima és:

$$z^n = (|z|(\cos\theta + i\sin\theta))^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

o bé, expressat en forma exponencial:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad (\text{si } z = |z|e^{i\theta}) .$$

D'altra banda, diem que $u \in \mathbb{C}$ és una arrel n-èsima de $z \in \mathbb{C}$ si, i només si, $u^n = z$. Fent servir el raonament anterior tenim que si $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, aleshores les seves arrels n-èsimes són:

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad 0 \le k \le n-1 .$$

En particular, les arrels n-èsimes de la unitat (és a dir, les solucions de l'equació $x^n - 1 = 0$) són $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $0 \le k \le n-1$.

2.3.1 Problemes resolts

1. Calculeu

$$\text{(a)} \quad (1 + \sqrt{3}i)^5 . \qquad \text{(b)} \quad (1-i)^6 .$$

Resolució.

a) Diem $z = 1 + \sqrt{3}i$. Volem calcular una potència de z. Per a fer això trobem primer la forma exponencial de z. Calculem el seu mòdul i el seu argument:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{d'on} \quad \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

Ara per a donar z^5 només ens cal obtenir el seu mòdul i argument:

$$|z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$$
$$\arg(z^5) = 5\arg(z) = \frac{5\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$$

D'on l'expressió exponencial de z^5 és $32e^{-i\frac{\pi}{3}}$ i la forma binòmica de z^5 és $32\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$, és a dir, $z = 16 - 16\sqrt{3}i$.

b) En aquest cas $z = 1 - i$. Trobem el mòdul i l'argument de z:

$$|z| = \sqrt{2}$$
$$\frac{z}{|z|} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow \arg\,(z) = \frac{-\pi}{4}$$

D'on el mòdul i l'argument de z^6 són:

$$|z^6| = |z|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$$
$$\arg\,(z^6) = 6\arg\,(z) = \frac{-6\pi}{4} = \frac{-3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Així doncs, la forma exponencial de z^6 és $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ i, expressat en forma binòmica, $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$.

• • •

2. Trobeu els nombres complexos $u \in \mathbb{C}$ tals que

a) $u^3 = 1 - i$. b) $u^4 = i$.

Resolució.

a) Si diem $z = 1 - i$, els nombres $u \in \mathbb{C}$ que busquem són les arrels cúbiques de z.

Calculem mòdul i argument de z:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{2} \\ \frac{z}{|z|} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow \arg\,(z) = \frac{-\pi}{4} = \theta\,. \end{aligned}$$

Els u que volem han de verificar:

$$|u| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{2}\,; \qquad \arg\,(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{3} = \frac{-\pi}{12} \\ \text{ó} \\ \frac{\theta+2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \\ \text{ó} \\ \frac{\theta+4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} \end{cases}$$

Així doncs, les tres arrels cúbiques de z, expressades en forma exponencial són:

$$u_1 = \sqrt[6]{2}\,e^{\frac{-\pi}{12}i}$$
$$u_2 = \sqrt[6]{2}\,e^{\frac{7\pi}{12}i}$$
$$u_3 = \sqrt[6]{2}\,e^{\frac{15\pi}{12}i}$$

b) En aquest cas, els nombres $u \in \mathbb{C}$ que busquem són les arrels quartes de $z = i$ ($|z| = 1$, $\arg\,(z) = \frac{\pi}{2} = \theta$).

D'on:

$$|u| = \sqrt[4]{|z|} = 1\,; \qquad \arg\,(u) = \begin{cases} \frac{\theta}{4} = \frac{\pi}{8} \\ \text{ó} \\ \frac{\theta+2\pi}{4} = \frac{5\pi}{8} \\ \text{ó} \\ \frac{\theta+4\pi}{4} = \frac{9\pi}{8} \\ \text{ó} \\ \frac{\theta+6\pi}{4} = \frac{13\pi}{8} \end{cases}$$

Així doncs, les quatre arrels que buscàvem, expressades en forma exponencial són:

$$u_1 = e^{\frac{\pi}{8}i} \qquad u_3 = e^{\frac{9\pi}{8}i}$$

$$u_2 = e^{\frac{5\pi}{8}i} \qquad u_4 = e^{\frac{13\pi}{8}i}$$

• • •

3. Calculeu $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}$, essent ε una arrel n-èsima de la unitat.

Resolució.

Si $\varepsilon = 1$ el que ens demanen es redueix a calcular la suma de la sèrie aritmètica $1+2+3+\cdots+n = \frac{n+1}{2}n$.

Si $\varepsilon \neq 1$, podem multiplicar l'expressió que ens dóna l'enunciat per $1-\varepsilon$:

$$\begin{aligned} &(1-\varepsilon)(1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}) = \\ &\quad = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1} - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 - \cdots - n\varepsilon^n = \\ &\quad = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} - n\varepsilon^n \end{aligned}$$

Per ser ε una arrel n-èsima de la unitat, $\varepsilon^n = 1$. D'altra banda, calculem la suma dels primers n termes de la sèrie geomètrica de raó ε:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = 0\,,$$

amb la qual cosa, aïllant de la igualtat anterior, obtenim

$$1 + 2\varepsilon + \cdots + n\varepsilon^{n-1} = \frac{-n}{1-\varepsilon}\,.$$

2.3.2 Problemes proposats

1. Trobeu els nombres complexos tals que:

a) $\overline{z} = z^2$. b) $\overline{z} = z^3$. c) $\overline{z} = z^5$.

Solució:

a) 0, e^{i0} $(=1)$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left(= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ $\left(= \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

b) $0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i.$

c) $0,\ e^{i0}=1,\ e^{i\frac{\pi}{3}}\ \left(=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ \left(=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ e^{i\pi}\ (=-1),$
$e^{i\frac{4\pi}{3}}\ \left(=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ e^{i\frac{5\pi}{3}}\ \left(=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

2. Trobeu un nombre complex z tal que el conjugat de z^5 multiplicat per $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sigui igual a $\frac{8}{1+i}$.

Solució: $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{10}}$.

3. Trobeu els exponents $n\in\mathbb{N}$ de la potència $(1-i)^n$ per tal que la representació geomètrica del nombre que determina sigui:

a) punt interior a la circumferència de centre l'origen i radi 3.

b) punt exterior a la circumferència de centre l'origen i radi 9.

c) punt interior a la corona circular de centre l'origen i radis 3 i 9.

Solució:

a) $n\le 3$.

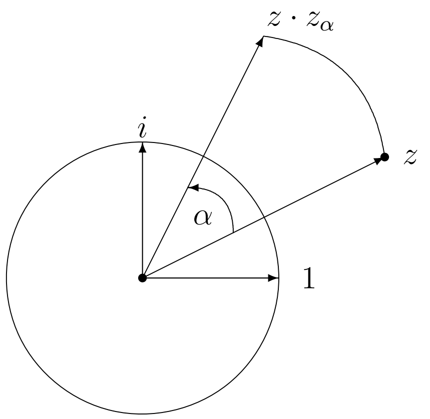
b) $n\ge 7$.

c) $4\le n\le 6$.

2.4 Problemes geomètrics

En aquest apartat només volem fer notar certes propietats geomètriques dels nombres complexos.

Un primer fet que volem remarcar és el següent. En multiplicar un nombre complex z pel nombre $z_\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha$ (amb $|z_\alpha|=1$) el que fem, des del punt de vista geomètric, és un gir de centre l'origen i angle α, en sentit antihorari.



Aquest és un resultat que pot ésser útil a l'hora de resoldre problemes.

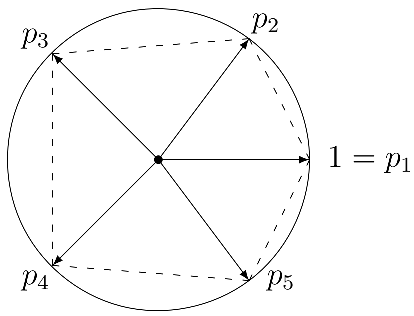
Un altre raonament a tenir en compte és el que fa referència a les arrels d'un nombre complex. Si z és un nombre complex i identifiquem les seves arrels n-èsimes amb punts $p_i \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \dots, n)$ aleshores tenim el resultat següent.

Els punts p_i $(i = 1, \dots, n)$ es troben tots sobre la circumferència de radi $\sqrt[n]{|z|}$ i equidisten entre ells. O sigui, els punts p_i són els vèrtexs d'un polígon regular.

Així, per exemple, les arrels cinquenes d'un nombre z es troben sobre la circumferència de radi $\sqrt[5]{|z|}$. A més, si $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ llavors les arrels cinquenes de z són:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta}{5} + i \sin\frac{\theta}{5}\right) \\
p_2 &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta+2\pi}{5} + i \sin\frac{\theta+2\pi}{5}\right) \\
p_3 &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta+4\pi}{5} + i \sin\frac{\theta+4\pi}{5}\right) \\
p_4 &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta+6\pi}{5} + i \sin\frac{\theta+6\pi}{5}\right) \\
p_5 &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta+8\pi}{5} + i \sin\frac{\theta+8\pi}{5}\right)
\end{aligned}
$$

Veiem que els arguments de les diferents arrels difereixen, en aquest cas, en $\frac{2\pi}{5}$ radians. En general, els arguments de les arrels n-èsimes de $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ difereixen en $\frac{2\pi}{n}$ radians.

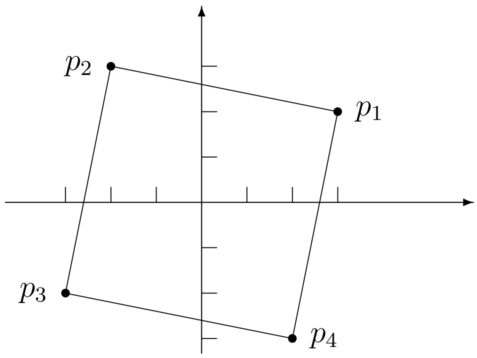


Arrels cinquenes de $z = 1$

2.4.1 Problemes resolts

1. Un quadrat amb centre l'origen té un vèrtex en el punt $(3, 2)$. Trobeu els altres vèrtexs.

   Resolució. Sigui Q el quadrat que ens interessa i siguin $p_1 = (3, 2)$, $p_2 = (-2, 3)$, $p_3 = (-3, -2)$ i $p_4 = (2, -3)$ els seus vèrtexs.



Obtenim p_2 a partir de p_1 fent un gir de $90°$. De forma anàloga obtenim p_3 i p_4. Notem z_i el nombre complex, la reresentació geomètrica del qual és p_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Per fer això considerem:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 2i \\ z_{90°} &= \cos 90° + i \sin 90° = i \end{aligned}$$

Calculem, aleshores, $z_2 = z_1 \cdot z_{90°} = -2 + 3i$. I sabem que geomètricament l'únic que hem fet és un gir de $90°$.

Treballant de forma semblant

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1(z_{90})^2 = z_1(-1) = -3 - 2i \\ z_4 &= z_1(z_{90})^3 = z_1(-i) = 2 - 3i \end{aligned}$$

Tenim doncs: $p_2 = (-2, 3)$, $p_3 = (-3, -2)$ i $p_4 = (2, -3)$.

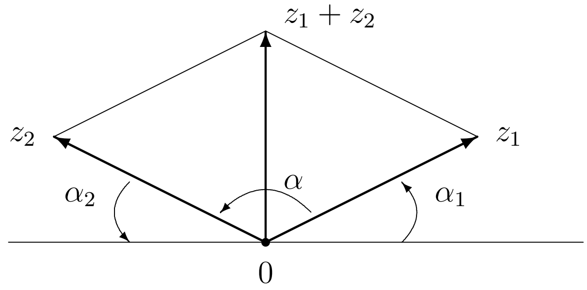
• • •

2. Proveu que si tenim tres nombres complexos z_1, z_2, z_3 tals que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ i $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ aleshores la representació geomètrica de z_1, z_2, z_3 són els vèrtexs d'un triangle equilàter inscrit a la circumferència de radi 1 i centre l'origen.

Resolució. Donat que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ és obvi que la representació geomètrica dels nombres complexos z_1, z_2, z_3 seran punts sobre la circumferència unitat. Ens cal només veure que aquests punts equidisten.

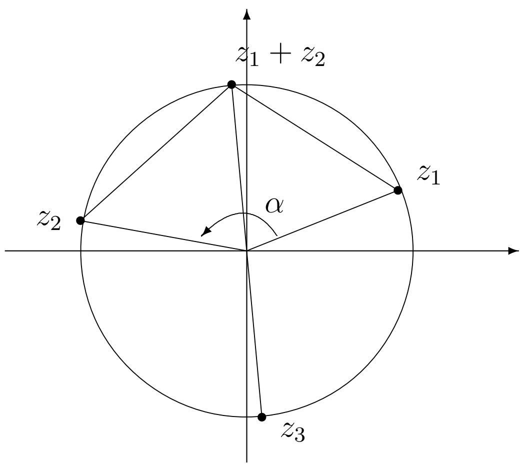
Donat que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ tenim que $z_1 + z_2 = -z_3$ i, per ser $|z_3| = 1$ aleshores també $|-z_3| = 1$.

Així doncs, z_1 i z_2 han de ser tals que la seva suma estigui també sobre la circumferència unitat. D'aquesta forma hem obtingut la figura següent:



Observeu que el paral·lelogram de vèrtexs z_1, z_2, $z_1 + z_2$, 0 és un romb els costats del qual són tots de mida 1. A més, atès que la diagonal que uneix 0 amb $z_1 + z_2$ és també de mida 1, el sinus dels angles α_1 i α_2 del dibuix és $1/2$. Per tant, $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$. D'aquí deduïm que $\alpha = 120°$.

Pel que fa a z_3, recordem que $z_3 = -(z_1 + z_2)$.



O sigui z_3 és l'oposat de $z_1 + z_2$ respecte a l'origen 0, està sobre la recta r que conté 0 i $z_1 + z_2$. Per ser les diagonals d'un romb perpendiculars i $|z_1| = |z_2|$ tenim que z_1 i z_2 són simètrics respecte de la recta r.

Així doncs, $d(z_1, z_3) = d(z_2, z_3)$, d'on deduïm que els angles β_1 i β_2 del dibuix són iguals. A més, $\beta_1 + \beta_2 = 360° - \alpha = 240°$, d'on $\beta_1 = \beta_2 = 120° = \alpha$. Es demostra amb això que el triangle de vèrtexs z_1, z_2 i z_3 és equilàter.

• • •

3. Sigui T_1 el triangle de vèrtexs $(3, 4)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Sigui T_2 el triangle que s'obté a partir de T_1 aplicant una homotècia (vectorial) de raó 2. (S'anomena homotècia vectorial de $\mathbb{C}$ de raó λ a una aplicació definida per: $z \in \mathbb{C} \longrightarrow \lambda z$.)

Sigui T_3 el triangle que obtenim a partir de T_2 fent un gir de $180°$ al voltant de l'origen. Calculeu els vèrtexs de T_3.

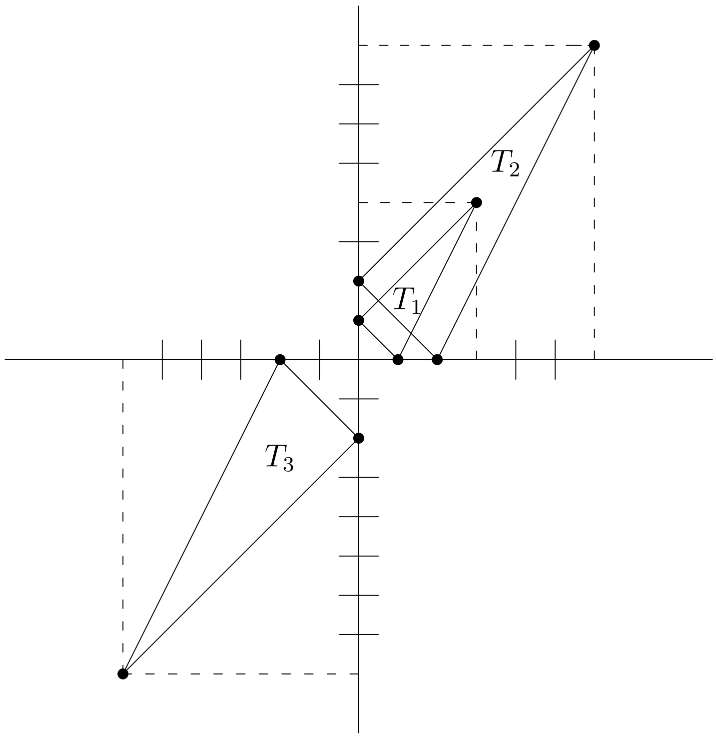
Resolució. Fàcilment ens adonem que els vèrtexs de T_2 són $(6, 8)$, $(2, 0)$ i $(0, 2)$.

Sigui $z_{180} = \cos 180° + i \sin 180° = -1$. Considerem:

$$z_1 = 6 + 8i\,, \qquad z_2 = 2\,, \qquad z_3 = 2i\,.$$

Operant: $\quad z_{180} \cdot z_1 = -6 - 8i\,, \qquad z_{180} \cdot z_2 = -2\,, \qquad z_3 = -2i\,.$

Finalment els vèrtexs de T_3 són els punts $(-6,-8)$, $(-2,0)$ i $(0,-2)$.



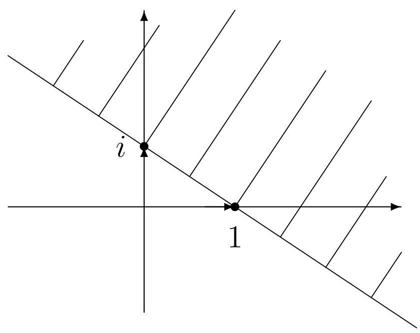
2.4.2 Problemes proposats

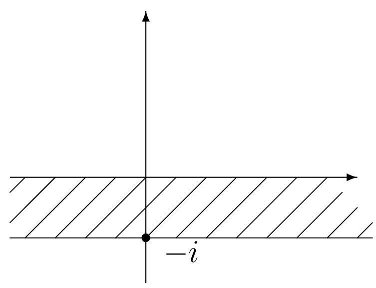
1. Trobeu el lloc geomètric dels punts que són representació geomètrica dels $z \in \mathbb{C}$ que satisfan les equacions:

a) $\text{Re}\, z + \text{Im}\, z < 1$. b) $0 < \text{Re}\,(iz) < 1$. c) $|z - z_1| = |z - z_2|\,; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Solució:

(a) $S = \{z = a + bi \,|\, b < 1 - a\}$ (b) $S = \{z = a + bi \,|\, -1 < b < 0\}$





(c) S: recta perpendicular a la recta que passa per z_1 i z_2 i que passa pel punt mig de z_1 i z_2.

2. Diem raó simple de tres nombres complexos diferents z_1, z_2, z_3, i la notem (z_1, z_2, z_3), al quocient:

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Sigui $p_i \in \mathbb{R}^2$ la representació geomètrica de z_i $(i = 1, 2, 3)$. Demostreu que

$$p_1, p_2, p_3 \quad \text{estan alineats} \iff (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}.$$

3. Trobeu p_3 el tercer vèrtex d'un triangle equilàter que té dos vèrtexs en els punts $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 1)$.

Solució:

$$p_3 = \left(\tfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o bé} \qquad p_3' = \left(\tfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

4. Un punt $p \in \mathbb{R}^2$ es transforma en el punt $p' = (-2, 4)$ després d'haver aplicat a p un gir de centre l'origen i angle $135°$. Quines són les coordenades de p?

Solució: $p = (3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

5. Un triangle equilàter ABC té el vèrtex A coincidint amb l'origen de coordenades, el vèrtex B és $(\sqrt{3}, -1)$ i el tercer vèrtex C es troba situat en el primer quadrant. Trobeu les coordenades de C.

Solució: $C = (\sqrt{3}, 1)$.

6. Sigui $0ABC$ un quadrat tal que dos dels seus vèrtexs són $0 = (0, 0)$, $A = (3, 0)$ i C està en el primer quadrant. Sigui $0A'B'C'$ el quadrat que s'obté a partir de $0ABC$ aplicant una homotècia (vectorial) de raó 2 seguida d'un gir (en sentit antihorari) de centre l'origen i angle $30°$.

Solució: $A' = (3\sqrt{3}, 3)$, $B' = (-3, 3\sqrt{3})$, $C' = (3\sqrt{3} - 3, 3\sqrt{3} + 3)$.

2.5 Miscel·lània

2.5.1 Problemes resolts

1. La suma de dos nombres complexos és $4 + 2i$. La part real d'un d'ells és 3 i el seu quocient és un nombre complex imaginari pur. Trobeu les parelles de nombres complexos que verifiquen l'enunciat.

Resolució. Sigui (z_1, z_2) una parella de nombres complexos que verifica

a) $z_1 + z_2 = 4 + 2i$.

b) $\mathrm{Re}\,(z_i) = 3$ per a algun $i = 1, 2$.

c) $\frac{z_1}{z_2} = ki$, $\quad k \in \mathbb{R}$.

Comencem observant que si $\alpha \in \mathbb{C}$ és un nombre imaginari pur, és a dir, $\alpha = ki$ amb $k \in \mathbb{R}$, aleshores α^{-1} també ho és:

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{k} i^{-1} = -\frac{1}{k} i \quad \text{atès que} \quad i^{-1} = -i\,.$$

Així doncs els paper que juguen z_1 i z_2 és simètric. Suposem que $\mathrm{Re}\,(z_1) = 3$ i considerem:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + bi \\ z_2 &= c + di \end{aligned}$$

Imposem que z_1, z_2 verifiquin (a) i tenim:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3 + c = 4 \\ \\ (2) & b + d = 2 \end{array}\right\} \qquad \text{d'on } c = 1\,.$$

Estudiem ara el quocient $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + bd + (b - 3d)i}{1 + d^2}\,.$$

Imposem que $\frac{z_1}{z_2}$ sigui imaginari pur; aleshores

$$(3) \qquad 3 + bd = 0\,.$$

De (2) tenim $b = 2 - d$. Substituïm en (3),

$$\begin{aligned} 3 + d(2 - d) &= 0 \\ 3 + 2d - d^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolem aquesta equació i obtenim $d = 3$ o $d = -1$.

Si $d = 3$ aleshores $b = -1$ i si $d = -1$ tenim $b = 3$.

Així doncs, les possibles parelles de punts que verifiquin l'enunciat, són:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = 3 - i \\ \\ z_2 = 1 + 3i \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = 3 + 3i \\ \\ z_2 = 1 - i \end{array}\right.$$

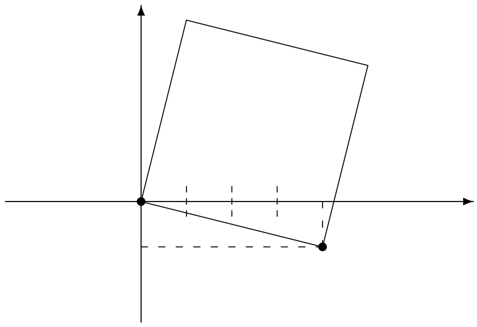
i

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 + 3i \\ \\ z_2 = 3 - i \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 - i \\ \\ z_2 = 3 + 3i \end{array}\right. .$$

• • •

2. Dos vèrtexs consecutius d'un quadrat són l'origen de coordenades i el punt $(3, -1)$. Trobeu les coordenades dels altres dos vèrtexs, dels quals sabem que tenen ordenada positiva.

Resolució. Fem un dibuix



Sigui $ABCD$ el quadrat de l'enunciat. Ens adonem que podem obtenir D fent girar B un angle de $90°$ amb centre l'origen.

Això podem fer-ho operant:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - i \quad \text{nombre complex la representació geomètrica del qual és el punt } B \\ z_{90^\circ} &= i \\ z_1 \cdot z_{90^\circ} &= (3 - i)i = 1 + 3i \end{aligned}$$

D'on $D = (1, 3)$.

Anem ara a calcular el vèrtex C. Veiem que

a) $|AC| = \sqrt{2}|AB|$ (aplicant el teorema de Pitàgores).

b) L'angle entre AB i AC és de $45°$.

Així doncs, $C = \sqrt{2}\cdot z_{45^\circ} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(3-i) = 4+2i$. Finalment, $C = (4, 2)$.

2.5.2 Problemes proposats

1. Trobeu els nombres complexos tals que z, z^2 i $1 - z$ tenen el mateix mòdul.

Solució: Hi ha dos nombres complexos que verifiquen l'enunciat, i són

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{i} \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

2. Calculeu

a) $(a + b)(a + bw)(a + bw^2)$

b) $(aw^2 + bw)(bw^2 + aw)$

per a $a, b \in \mathbb{C}$ qualssevol i $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Solució:

a) $a^3 + b^3$.

b) $a^2 - ab + b^2$.

3. Siguin $z_1, \ldots, z_6$ les arrels sisenes de $z \in \mathbb{C}$.

a) Existeixen nombres complexos $a_2, \ldots, a_6$ tals que, si $a_1 = \sqrt[6]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg(z)}{6}}$, amb el producte $a_1 \cdot a_i$ obtenim z_i, $i = 2, \ldots, 6$? En cas afirmatiu, calculeu a_i, $i = 2, \ldots, 6$.

b) Doneu una interpretació geomètrica de l'apartat (a).

c) Feu la representació geomètrica dels nombres $z_1, \ldots, z_6$. Quina figura formen?

Solució:

a) $a_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, $a_3 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $a_4 = e^{\pi i}$, $a_5 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, $a_6 = e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

b) Podem obtenir z_i d'aplicar un gir d'angle $\pi/3$ a z_{i-1}.

c) $z_1, \ldots, z_6$ són el vèrtexs d'un exàgon regular inscrit en la circumferència de radi $|z_1|$ $(= \sqrt[6]{|z|})$ i centre l'origen.

4. Donat el quocient $\frac{3-2\alpha i}{4-3i}$, determineu $\alpha \in \mathbb{R}$ per tal que

a) sigui un nombre real.

b) sigui un nombre imaginari pur.

c) la seva representació gràfica estigui sobre la bisectriu del 1er i 3er quadrant.

Solució:

a) $\alpha = 9/8$.

b) $\alpha = -2$.

c) $\alpha = -3/14$.

Capítol 3

Polinomis

3.1 Introducció

(Extret de *Entorn del desenvolupament històric de les equacions algebraiques.* Vegeu el text complet en la introducció històrica).

L'estudi dels polinomis, i de les equacions associades a ells, ha evolucionat molt al llarg del temps, i el seu recorregut històric és molt suggerent i instructiu. És a finals del segle XIX que els anells de polinomis es van començar a estudiar des d'un nou enfocament, amb el desenvolupament de l'àlgebra abstracta.

L'algorisme de resolució d'equacions algebraiques de segon grau podem deduir-lo ja a les tauletes babilòniques. La matemàtica grega, basada en la geometria, va fer també la seva aportació a la resolució d'equacions algebraiques. Cal destacar també el paper fonamental que els àrabs han jugat en el desenvolupament de les equacions algebraiques. A l'obra de Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi (850 dC) es classificava les equacions fins a segon grau en sis tipus diferents, i explicava les regles a seguir per a resoldre-les.

Girolamo Cardano (1501-1576) i Rafaello Bombelli (1526-1573), entre d'altres algebristes del Cinquecento, van contribuir amb les seves obres a la resolució de les equacions de tercer grau i biquadrades. François Viète (1540-1603) va donar un nou mètode per resoldre l'equació polinòmica de tercer grau i també per algun tipus de quart grau.

René Descartes (1596-1650) va contribuir a la resolució d'equacions de tercer i quart grau, i algunes concretes de cinquè i sisè grau. Cal remarcar que en l'obra de Descartes s'introdueix la notació actual, llevat de dues variants menors. Després de les aportacions de Descartes, la resolució de les equacions s'abordava amb argumentacions geomètriques però també i, sobretot, amb demostracions algebraiques.

Al llarg del segle XVIII, els esforços vàren anar dirigits a resoldre la quíntica. Évariste Galois (1811-1832) va ser qui va resoldre completament el problema de quines equacions són resolubles mitjançant operacions algebraiques, basant-se en els treballs anteriors de Lagrange i d'Abel.

El Teorema fonamental de l'àlgebra representa un altre dels fils conductors del desenvolupament de la teoria de les equacions algebraiques, la primera demostració rigorosa del qual és la presentada pel matemàtic Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

3.2 Arrel d'un polinomi. Multiplicitat

Sigui $p(x) \in K[x]$, és a dir, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomi de grau n amb coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pertanyents a un cos commutatiu K, on $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Anomenem coeficient principal de $p(x)$ al coeficient a_n i diem que $p(x)$ és mònic si $a_n = 1$. Si $\alpha \in K$, $p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$ direm que és el valor de $p(x)$ en α. Posarem gr $(p(x)) = n$.

Direm que α és una arrel de $p(x)$ de multiplicitat $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, si $p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \cdots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0$ i $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$ la qual cosa equival a dir que $(x-\alpha)^m$ divideix $p(x)$ i $(x-\alpha)^{m+1}$ ja no divideix $p(x)$; és a dir: $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ amb $q(x) \in K[x]$, $q(\alpha) \neq 0$.

Si $m = 1$ direm que α és una arrel simple; si $m = 2$, doble, etc. En general, per a $m \geq 2$, direm que α és arrel múltiple de $p(x)$.

Cas 1. Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ és tal que $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, aleshores, la fracció irreductible a/b és arrel de $p(x)$ si i només si a és divisor de a_0 i b ho és de a_n. En particular, $\alpha \in \mathbb{Z}$ és arrel de $p(x)$ si i només si α és divisor de a_0.

Cas 2. Sigui $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α és arrel de $p(x)$ aleshores el conjugat de α, $\bar{\alpha}$, també és arrel de $p(x)$, amb la mateixa multiplicitat.

3.2.1 Problemes resolts

1. Determineu el polinomi mònic $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau 5 que verifica que 1 és arrel triple de $p(x)$, $p(0)$ val 5 i 2 és arrel de $p(x) - 1$.

Resolució.

És equivalent dir que 1 és arrel triple de $p(x)$ a dir que existeix un cert $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$p(x) = (x-1)^3 q(x) \tag{3.1}$$

amb $q(1) \neq 0$.

Atès que $\text{gr}(p(x)) = 5$, tenim que $\text{gr}(q(x)) = 2$. Al ser $p(x)$ mònic, $q(x)$ també ha de ser-ho; per tant, $q(x)$ és de la forma

$$q(x) = x^2 + bx + c\,.$$

Substituïm x per 0 en (3.1) i fent servir que $p(0) = 5$ obtenim

$$5 = p(0) = (-1)^3 q(0) = (-1) \cdot c\,,$$

d'on $c = -5$.

Finalment, imposem que 2 és arrel de $p(x) - 1$, la qual cosa és equivalent a dir

$$p(x) - 1 = (x-2) \cdot r(x)$$

per a un cert $r(x) \in \mathbb{R}[x]$. D'aquí deduïm

$$p(x) = (x-2)r(x) + 1$$

Substituïm x per 2 i tenim $p(2) = 1$. Utilitzem ara que $p(2) = 1$ en (3.1),

$$\begin{aligned}
1 &= p(2) = (2-1)^3 q(2) = q(2) = 4 + 2b + c = 4 + 2b - 5 = -1 + 2b \\
1 &= -1 + 2b \Longrightarrow 2b = 2 \Longrightarrow b = 1
\end{aligned}$$

Finalment,

$$p(x) = (x-1)^3(x^2 + x - 5) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 16x + 5\,.$$

• • •

2. Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi, una arrel del qual és $1+i$, la resta de dividir $p(x)$ per x és 5, i, a més, es verifica que $p(0) = 6$. Quina és la resta de dividir $p(x)$ per $x^3 - 2x^2 + 2x$?

Resolució.

Atès que $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $1 + i \notin \mathbb{R}$, fem servir que un nombre complex és arrel d'un polinomi amb coeficient reals si i només si el seu conjugat també ho és. Així doncs, tenim:

$$p(1+i) = 0 \tag{3.2}$$
$$p(1-i) = 0 \tag{3.3}$$
$$p(0) = 6 \tag{3.4}$$

D'altra banda:

$$p(x) = (x^3 - 2x^2 + 2x)q(x) + r(x) \tag{3.5}$$

amb gr $(r(x)) <$ gr$(x^3 + 2x^2 + 2x) = 3$ i, per tant, $r(x) = ax^2 + bx + c$ per a uns certs $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ens adonem que $x^3 - 2x^2 + 2x = x(x-(1+i))(x-(1-i))$ i utilitzant la informació que ens dóna (4.2), (4.3) i (3.4) en (3.5) obtenim les equacions següents:

$$p(1+i) = 0 = a(1+i)^2 + b(1+i) + c \ (= r(1+i)) \tag{3.6}$$
$$p(1-i) = 0 = a(1-i)^2 + b(1-i) + c \ (= r(1-i)) \tag{3.7}$$
$$p(0) = 6 = c \ (= r(0)) \tag{3.8}$$

Restant (3.6)-(3.7),

$$a[(1+i)^2 - (1-i)^2] + b[(1+i) - (1-i)] = 0 \tag{3.9}$$

Calculem

$$(1+i)^2 - (1-i)^2 = [(1+i) + (1-i)][(1+i) - (1-i)] = 2 \cdot 2i = 4i\,.$$

Així doncs,

$$4i \cdot a + 2i \cdot b = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \Longrightarrow b = -2a\,.$$

Substituïm $\left.\begin{array}{c} b = -2a \\ c = 6 \end{array}\right\}$ en l'equació (3.6):

$$\begin{array}{rcl} a(1+i)^2 - 2a(1+i) + 6 & = & 0 \\ a(1+i)(1+i-2) + 6 & = & 0 \\ -a(1+i)(1-i) + 6 & = & 0 \\ -a(1-(-1)) + 6 & = & 0 \Longrightarrow -a \cdot 2 + 6 = 0 \Longrightarrow a = 3\,. \end{array}$$

Hem obtingut

$$\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -2a = -6 \\ c & = & 6 \end{array}$$

Amb la qual cosa concloem

$$r(x) = 3x^2 - 6x + 6\,.$$

Noteu que amb les dades donades no podem determinar el polinomi $p(x)$.

• • •

3. Sigui $p(x)$ un polinomi mònic de grau 6, les arrels del qual són també arrels de $p'(x)$. A més, tres d'aquestes arrels són nombres enters que estan en progressió aritmètica de raó 1. Trobeu tots els polinomis $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ com abans que verifiquen que $p(2) = 36$.

Resolució.

Atès que totes les arrels de $p(x)$ són arrels de $p'(x)$, concloem que totes les arrels de $p(x)$ són múltiples.

A més, hi ha tres arrels de $p(x)$ que estan en progressió aritmètica de raó 1. Siguin a, $a+1$, $a+2$ aquestes arrels. Com que són arrels múltiples de $p(x)$, deduïm que

$$(x-a)^2(x-(a+1))^2(x-(a+2))^2$$

divideix $p(x)$ i per ser $\mathrm{gr}(p(x)) = 6$ i mònic:

$$p(x) = (x-a)^2(x-(a+1))^2(x-(a+2))^2\,.$$

Imposem que $p(2) = 36$:

$$36 = p(2) = (2-a)^2(1-a)^2(-a)^2\,.$$

Ens interessa trobar els nombres $a \in \mathbb{Z}$ tals que

$$a^2(a-1)^2(a-2)^2 = 36\,. \tag{3.10}$$

Ens adonem que a ha de ser diferent de 0, 1 i 2. Notem $s_a = (a-1)^2(a-2)^2$.

Si $a = 3$, aleshores $s_a = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 36$; així doncs, $a = 3$ és una solució de (3.10). Si $a \geq 4$, aleshores $s_a > 36$. D'altra banda, si $a = -1$, $s_a = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 36$ i si $a \leq -2$, $s_a > 36$. Per tant, els únics valors de $a \in \mathbb{Z}$ per als quals $s_a = 36$ són $a = 3$ i $a = -1$.

Concloem que hi ha dos polinomis que verifiquen l'enunciat. Aquests són

$$p_1(x) = (x-3)^2(x-4)^2(x-5)^2 = x^6 - 24x^5 + 238x^4 - 1248x^3 + 3649x^2 - 5640x + 3600$$
$$p_2(x) = (x+1)^2x^2(x-1)^2 = x^6 - 2x^4 + x^2$$

3.2.2 Problemes proposats

1. Calculeu m i n per a que els polinomis de $\mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + mx + n \\ q(x) &= x^2 - nx + 9 \end{aligned}$$

verifiquin les condicions següents:

a) $p(x)$ i $q(x)$ tenen una arrel comuna,

b) 2 és arrel de $p(x)$,

c) les arrels de $p(x)$ són totes positives.

Solució.

Hi ha dues possibilitats: $m = -5$ i $n = 6$ o bé $m = -21/4$ i $n = 13/2$.

2. Calculeu el polinomi mònic $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau 5 tal que $p(1+2i) = 0$, $p(2-i) = 0$ i $p(0) = -25$.

Solució.

$$p(x) = x^5 - \frac{39}{7}x^4 + 19x^3 - 33x^2 + 30x - 25\,.$$

3.3 Descomposició en factors primers d'un polinomi

Un polinomi $p(x) \in K[x]$ de grau més gran o igual que 1, diem que és primer (o irreductible) a $K[x]$ (per a nosaltres K serà, a la pràctica, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si no es pot escriure com a producte de dos polinomis de $K[x]$ de graus més petits que el de $p(x)$. És a dir, si grau $p(x) \geq 1$ i els seus únics divisors són del tipus a o $ap(x)$ essent $a \in K$, $a \neq 0$. La irreductibilitat d'un polinomi depèn del cos K considerat; així, per exemple, x^2+1 és primer a $\mathbb{R}[x]$ però no ho és a $\mathbb{C}[x]$ (ja que $x^2+1 = (x+i)(x-i)$ a $\mathbb{C}[x]$). Observeu que qualsevol que sigui K, els polinomis de grau 1 són primers.

El Teorema fonamental de l'àlgebra (vegeu Annex 2, apartat 2) admet diferents formulacions equivalents entre les quals podem enunciar:

"Tot polinomi $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ té n arrels a $\mathbb{C}$".

"Tot polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ descompon en producte de polinomis de grau 1 i polinomis de grau 2 amb arrels complexes no reals (i conjugades)".

Per tant, a $\mathbb{C}[x]$ els únics polinomis primers són els de grau 1 mentre que a $\mathbb{R}[x]$ també ho són els de segon grau $\alpha(x^2+bx+c)$ amb discriminant negatiu ($b^2-4c<0$).

Tot polinomi $p(x) \in K[x]$ amb grau $p(x) \geq 1$ es pot escriure com a producte de polinomis irreductibles de $K[x]$. És a dir, que sempre podrem escriure $p(x)$ de forma única (llevat l'ordre dels factors) com a:

$$p(x) = \lambda(p_1(x))^{m_1} \dots (p_r(x))^{m_r}$$

amb $\lambda \in K$; $p_i(x) \in K[x]$ primer i mònic $\forall\, i$, $1 \leq i \leq r$; $p_i(x) \neq p_j(x)$ si $i \neq j$. Aquesta és l'anomenada descomposició de $p(x)$ en factors primers a $K[x]$.

3.3.1 Problemes resolts

1. Doneu, a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$, la descomposició en factors primers del polinomi

$$p(x) = x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 30x^3 + 49x^2 - 24x + 36\,.$$

Resolució. Les úniques arrels enteres que pot tenir $p(x)$ són: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, $-$, 6, -6, 9, -9, 36, -36. D'entre elles, observem per comprovació directa que només 3 n'és arrel i, a més, és una arrel doble, ja que $p(3) = p'(3) = 0$, $p''(3) \neq 0$. Així doncs, $(x-3)^3$ divideix $p(x)$, que és:

$$p(x) = (x-3)^2(x^4+5x^2+4)\,.$$

Observem que el segon factor es pot descompondre de la forma següent:

$$x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4)$$

i que aquests dos darrers factors són polinomis de grau dos, ambdós amb discriminant negatiu, la qual cosa significa que cap d'ells no té cap arrel en $\mathbb{R}$. La descomposició de $p(x)$ en factors primers a $\mathbb{R}[x]$ és:

$$p(x) = (x-3)^2(x^2+1)(x^2+4).$$

En canvi, a $\mathbb{C}[x]$ tenim:

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (x+i)(x-i) \\ x^2+4 &= (x+2i)(x-2i) \end{aligned}$$

la qual cosa ens diu que la descomposició de $p(x)$ en factors primers a $\mathbb{C}[x]$ és:

$$p(x) = (x-3)^2(x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)\,.$$

Observeu que la descomposició de $p(x)$ en factors primers a $\mathbb{Q}[x]$ és la mateixa que a $\mathbb{R}[x]$:

$$p(x) = (x-3)^2(x^2+1)(x^2+4)\,.$$

• • •

2. Trobeu quines condicions han de verificar $a, b \in \mathbb{R}$ per tal que $p(x) = x^2 + a$ i $q(x) = x^3 + b$ siguin primers entre si.

Resolució. La descomposició de $p(x)$ i $q(x)$ a $\mathbb{C}[x]$ és de la forma:

$$\begin{aligned} &p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \quad \text{on } \lambda_1 = \sqrt{-a},\ \lambda_2 = -\sqrt{-a} \\ &q(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)(x-\mu_3) \quad \text{amb } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ les 3 arrels cúbiques de } -b \end{aligned}$$

Els dos polinomis donats seran primers entre si sempre que $\lambda_i \neq \mu_j$ per a $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$. Com que $\lambda_i^2 = -a$ i $\mu_j^3 = -b$, això és equivalent a dir que

$$(-a)^3 \neq (-b)^2 \Longleftrightarrow -a^3 \neq b^2\,.$$

Així doncs, els dos polinomis donats són primers si, i només si, $-a^3 \neq b^2$.

• • •

3. Determineu tots els polinomis primers de $\mathbb{R}[x]$ que divideixen $p(x) = x^3 - 27$ i són mònics.

Resolució. En primer lloc, fem la descomposició en factors primers de $p(x)$ a $\mathbb{C}[x]$:

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

amb λ_1, λ_2, λ_3 les tres arrels cúbiques de 27, és a dir, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ i $\lambda_3 = 3 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \overline{\lambda_2}$.

L'únic divisor de $p(x)$ mònic amb coeficients reals de grau 1 és: $q_1(x) = x - 3$, que és primer.

Els divisors de $p(x)$ mònics de grau 2 són: $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, $(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)$, i $(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$. D'entre aquests només el darrer és un polinomi amb coeficients reals:

$$q(x) = (x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^2 - 3x + 1$$

que és primer a $\mathbb{R}[x]$ (però no a $\mathbb{C}[x]$) atès que no té cap arrel real. Òbviament, $p(x)$ és divisor d'ell mateix, i també ho és el polinomi constant 1, però cap dels dos no és primer: $p(x)$ és divisible per $x-3$ i el polinomi constant 1 té grau 0.

3.3.2 Problemes proposats

1. Factoritzeu com a producte de polinomis primers a $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$, respectivament, els polinomis següents:

a) x^4-2. (b) x^6-81. (c) x^3-1

Solució.

a) x^4-2 és primer a $\mathbb{Q}[x]$

$x^4-2=(x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})$ a $\mathbb{R}[x]$

$x^4-2=(x-\sqrt[4]{2}i)(x+\sqrt[4]{2}i)(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})$ a $\mathbb{C}[x]$

b) $x^6-81=(x^3-9)(x^3+9)$ a $\mathbb{Q}[x]$

$x^6-81=(x-\sqrt[3]{9})(x+\sqrt[3]{9})(x^2-\sqrt[3]{9}x+\sqrt[3]{81})(x^2+\sqrt[3]{9}x+\sqrt[3]{81})$ a $\mathbb{R}[x]$

$x^6-81=(x-\sqrt[3]{9})\left(x-\sqrt[3]{9}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{9}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)(x+\sqrt[3]{9})$

$\left(x-\sqrt[3]{9}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{9}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$ a $\mathbb{C}[x]$

c) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ a $\mathbb{Q}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$

$x^3-1=(x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ a $\mathbb{C}[x]$

2. Descomponeu a $\mathbb{Q}[x]$ el polinomi

$$p(x)=36x^5-36x^4-25x^3+25x^2+4x-4$$

Solució.

$$p(x)=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{2}{3}\right)\left(x+\tfrac{2}{3}\right)(x-1)$$

3.4 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple de dos o més polinomis

Siguin $p_1(x),\dots,p_n(x)\in K[x]$. Anomenem màxim comú divisor d'aquests polinomis, i l'indiquem per m.c.d.$(p_1(x),\dots,p_n(x))$, al polinomi $d(x)\in K[x]$ tal que

1) és divisor de cadascun dels polinomis donats,

2) qualsevol altre divisor comú de tots és divisor de $d(x)$,

3) és mònic.

D'altra banda, anomenarem mínim comú múltiple dels esmentats polinomis, i l'indiquem per $\text{m.c.m.}(p_1(x), \dots, p_n(x))$, al polinomi $m(x) \in K[x]$ tal que

1) és múltiple de cadascun dels polinomis donats,

2) qualsevol altre múltiple comú de tots és múltiple de $m(x)$,

3) és mònic.

El màxim comú divisor de dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ es pot trobar mitjançant l'algorisme d'Euclides que consisteix a aplicar reiteradament el resultat següent: *Si* $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$ *amb grau* $r(x) <$ *grau* $p(x)$, $q(x) \neq 0$, llavors *m.c.d.* $(p(x), q(x)) =$ *m.c.d.* $(q(x), r(x))$.
Llavors, si $d(x) = \text{m.c.d.}\ (p(x), q(x))$ el mínim comú múltiple $m(x)$ de $p(x)$ i $q(x)$ és:

$$m(x) = \frac{p(x)q(x)}{a_n b_m d(x)}$$

on a_n i b_m són, respectivament, els coeficients principals de $p(x)$ i de $q(x)$.

3.4.1 Problemes resolts

1. Siguin $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2$, $\quad q(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ polinomis de $\mathbb{R}[x]$.

a) Calculeu $d(x) = m.c.d.(p(x), q(x))$

b) Trobeu polinomis $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ tals que $a(x)p(x) + b(x)q(x) = d(x)$.

Resolució.

a) Apliquem l'algorisme d'Euclides als polinomis $p(x)$, $q(x)$

$$\begin{array}{r|l}
p_1(x) = p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 & x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = q(x) = d_1(x) \\ \cline{2-2}
-x^4 + \ x^3 + 5x^2 - 3x - 2 & \qquad 1 = c_1(x) \\ \cline{1-1}
- \ x^3 + \ x^2 + 4x - 4 = r_1(x) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
p_2(x) = d_1(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 & - x^3 + x^2 + 4x - 4 = r_1(x) = d_2(x) \\ \cline{2-2}
-x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x \qquad & \qquad -x = c_2(x) \\ \cline{1-1}
- \ x^2 - \ x + 2 = r_2(x) &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
p_3(x) = d_2(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4 & \left| \; -x^2 - x + 2 = r_2(x) = d_3(x) \right. \\
\cline{2-2}
x^3 + x^2 - 2x & \qquad x - 2 = c_3(x) \\
\hline
2x^2 + 2x - 4 & \\
-2x^2 - 2x + 4 & \\
\hline
0 = r_3(x) &
\end{array}
$$

Tenim doncs que $d(x)$ és $\lambda \cdot d_3(x)$ per a un cert $\lambda \in \mathbb{R}$. Més precisament,

$$d_3(x) = r_2(x) = -x^2 - x + 2 = -d(x)$$

o sigui $d(x) = x^2 + x - 2$.

b) De les successives divisions fetes a l'apartat anterior, tenim:

$$p(x) = p_1(x) = d_1(x)c_1(x) + r_1(x) = q(x)c_1(x) + r_1(x) \tag{3.11}$$

$$q(x) = p_2(x) = d_1(x) = d_2(x)c_2(x) + r_2(x) = r_1(x)c_2(x) - d(x) \tag{3.12}$$

Aïllant $d(x)$ en (3.12),

$$d(x) = -q(x) + c_2(x)r_1(x) \tag{3.13}$$

I aïllant $r_1(x)$ en (3.11):

$$r_1(x) = p(x) - q(x)c_1(x) \tag{3.14}$$

Substituint (3.14) en (3.13):

$$d(x) = -q(x) + c_2(x)[p(x) - q(x)c_1(x)] = q(x)[-1 - c_2(x)c_1(x)] + p(x)c_2(x)$$

d'on finalment tenim que una parella de polinomis $a(x)$, $b(x)$ que verifica el que es demana a l'enunciat és

$$
\begin{aligned}
a(x) &= c_2(x) = -x \\
b(x) &= -1 - c_2(x)c_1(x) = -1 + x
\end{aligned}
$$

• • •

2. Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ són dos polinomis primers entre ells, demostreu que també són primers entre ells els de cadascuna de les parelles de polinomis següents:

a) $2p(x) + 3q(x)$; $2p(x) - 3q(x)$.

b) $(p(x))^2$; $(q(x))^2$.

c) $(p(x) + q(x))^2$; $(p(x) - q(x))^2$.

Resolució.

a) Demostrarem que els polinomis $2p(x)+3q(x)$ i $2p(x)-3q(x)$ són primers entre ells per reducció a l'absurd. És a dir, començarem suposant que no són primers entre ells i, aleshores, arribarem a una contradicció. Notem $r(x)=2p(x)+3q(x)$ i $s(x)=2p(x)-3q(x)$. Suposem que $\text{m.c.d.}(r(x),s(x)) = d(x) \neq 1$. Llavors, operant obtenim:

$$p(x) = \frac{1}{4}(r(x)+s(x)) \tag{3.15}$$
$$q(x) = \frac{1}{6}(r(x)-s(x)) \tag{3.16}$$

Donat que $d(x)$ divideix $r(x)$ i $s(x)$, existeixen polinomis $r_1(x)$, $s_1(x)$ els quals verifiquen

$$r(x) = d(x)r_1(x)$$
$$s(x) = d(x)s_1(x)$$

Substituïm a (3.15) i traiem factor comú:

$$p(x) = \frac{1}{4}(d(x)r_1(x)+d(x)s_1(x)) = \frac{1}{2}d(x)(r_1(x)+s_1(x))$$

Anàlogament, substituint a (3.16) i traient factor comú:

$$q(x) = \frac{1}{6}d(x)(r_1(x)-s_1(x))$$

Així doncs, $d(x)$ divideix alhora $p(x)$ i $q(x)$, la qual cosa contradiu que $p(x)$ i $q(x)$ siguin primers entre ells.

b) Descomponem a $\mathbb{C}[x]$ els polinomis $p(x)$, $q(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\lambda_1)^{m_1}\dots(x-\lambda_r)^{m_r} \\ q(x) &= (x-\mu_1)^{n_1}\dots(x-\mu_s)^{n_s} \end{aligned}$$

Tenim en compte que $p(x)$ i $q(x)$ són primers entre ells observem que $\lambda_i \neq \mu_j$, $\forall\, i,j$. Ara bé, si elevem al quadrat

$$\begin{aligned} (p(x))^2 &= (x-\lambda_1)^{2m_1}\dots(x-\lambda_r)^{2m_r} \\ (q(x))^2 &= (x-\mu_1)^{2n_1}\dots(x-\mu_s)^{2n_s} \end{aligned}$$

veiem que $(p(x))^2$ i $(q(x))^2$ no tenen cap factor comú, amb la qual cosa concloem que $(p(x))^2$ i $(q(x))^2$ són primers entre ells.

c) Veurem, de forma anàloga a l'apartat a) que els polinomis $a(x)=p(x)+q(x)$ i $b(x)=p(x)-q(x)$ són primers entre si. Suposem que $d(x) = m.c.d.(a(x),b(x)) \neq 1$. Llavors:

$$a(x) = d(x)a_1(x) \qquad \text{i} \qquad b(x) = d(x)b_1(x).$$

Atès que

$$p(x) = \frac{1}{2}(a(x) + b(x))$$
$$q(x) = \frac{1}{2}(a(x) - b(x))$$

tenim que

$$p(x) = \frac{1}{2}d(x)(a_1(x) + b_1(x))$$
$$q(x) = \frac{1}{2}d(x)(a_1(x) - b_1(x))$$

i $d(x)$ divideix $p(x)$ i $q(x)$, la qual cosa contradiu la hipòtesi de l'enunciat. Per tant, $a(x)$ i $b(x)$ són primers entre si. Aplicant l'apartat b) també ho són

$$(a(x))^2 = (p(x) + q(x))^2 \qquad \text{i} \qquad (b(x))^2 = (p(x) - q(x))^2 \,.$$

3.4.2 Problemes proposats

1. Calculeu, utilitzant l'algorisme d'Euclides, el màxim comú divisor de les parelles de polinomis següents:

a) $p_1(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$
   $q_1(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$

b) $p_2(x) = x^5 + x^3 - 9x^2 - 9$
   $q_2(x) = x^5 - x^3 - 9x^2 + 9$

c) $p_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$
   $q_3(x) = x^8 - 1$

Solució.

a) m.c.d. $(p_1(x), q_1(x)) = x^2 - 4$.

b) m.c.d. $(p_2(x), q_2(x)) = x^3 - 9$.

c) m.c.d. $(p_3(x), q_3(x)) = x^4 - 1$.

2. Considereu els polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + (1+\mu)x^4 + \mu x^3 - x^2 - (1+\mu)x - \mu \\ q(x) &= x^5 + \mu x^4 - 2x^3 - 2\mu x^2 + x + \mu \end{aligned}$$

Sigui $d(x) = \text{m.c.d.}(p(x), q(x))$. Per a quins valors de μ es verifica $\text{gr}(d(x)) = 3$?

Solució. Per a qualsevol valor de μ. Indicació:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x+1)(x+\mu)(x^2+x+1) \\ q(x) &= (x-1)(x+1)(x+\mu)(x^2-1) \end{aligned}$$

3. Calculeu les arrels, amb les seves respectives multiplicitats, dels polinomis:

a) $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

b) $q(x) = x^4 + x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$.

Solució.

a) -1 (doble), i, $-i$.

b) $\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}$.

4. Determineu el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de $p(x)$ i $q(x)$, essent

$$p(x) = x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6}; \qquad q(x) = x^2 - 2\,.$$

Solució.

$$x - \sqrt{2}; \qquad x^3 - \sqrt{3}x^2 - 2x + 2\sqrt{3}\,.$$

m.c.d.$(p(x), q(x)) = x - 2$

m.c.m.$(p(x), q(x)) = (x-1)(x-2)^3(x-3)(x+2)$.

3.5 Desenvolupament de Taylor d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau n, el desenvolupament de Taylor de la funció real de variable real que ve definida per $x \longmapsto p(x)$ en $x = \alpha \in \mathbb{R}$ és:

$$p(x) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n\,.$$

Així doncs, si d'un polinomi $p(x) \in K[x]$ en coneixem el grau n, el valor de $p(x)$ i les seves derivades fins a l'ordre n en $x = \alpha$, llavors podem reobtenir el polinomi en qüestió, mitjançant la fórmula de Taylor.

3.5.1 Problemes resolts

1. Calculeu $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\mathrm{gr}(p(x)) = 5$, $p(-1) = 15$, $p'(1) = 0$, $p''(1) = 0$, $p'''(1) = 6$, $p^{(\mathrm{IV})}(1) = 0$, $p(0) = p(2)$.

Resolució.

El desenvolupament de Taylor del polinomi que busquem en el punt $\alpha = 1$ és:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + \frac{p'(1)}{1!}(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \\ &\quad + \frac{p^{(\mathrm{IV})}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{p^{(\mathrm{V})}(1)}{5!}(x-1)^5 \end{aligned}$$

Substituïm $p'(1) = 0$, $p''(1) = 0$, $p'''(1) = 6$, $p^{(\mathrm{IV})}(1) = 0$ en l'expressió anterior i obtenim:

$$p(x) = p(1) + (x-1)^3 + \frac{p^{(\mathrm{V})}(1)}{5!}(x-1)^5 \tag{3.17}$$

Per tal d'imposar que $p(0) = p(2)$, calculem ambdós valors:

$$p(0) = p(1) - 1 - \frac{p^{(\mathrm{V})}(1)}{5!}; \qquad p(2) = p(1) + 1 + \frac{p^{(\mathrm{V})}(1)}{5!}$$

D'on restant les dues expressions

$$0 = p(0) - p(2) = -2 - 2\frac{p^{(\mathrm{V})}(1)}{5!}$$

Hem trobat, doncs,

$$p^{(\mathrm{V})}(1) = -5! = -120$$

Només ens resta imposar $p(-1) = 15$ en (3.17):

$$15 = p(-1) = p(1) - 8 + 32$$

Així doncs, $p(1) = -9$. Finalment, substituïm en (3.17) el valor de $p(1)$ i el de $p^{(\mathrm{V})}(1)$:

$$p(x) = -9 + (x-1)^3 - (x-1)^5 = -x^5 + 5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 2x - 9$$

• • •

2. Calculeu la resta de dividir

$$p_n(x) = nx^{2n} - 3nx^n + 2n$$

a) per $(x-1)^2$.

b) per $(x+1)^3$.

Resolució.

a) El desenvolupament de Taylor de $p_n(x)$ en $\alpha = 1$ és:

$$p_n(x) = p_n(1) + \frac{p_n'(1)}{1!}(x-1) + \frac{p_n''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(2n)}(1)}{(2n)!}(x-1)^{2n} \tag{3.18}$$

Treim $(x-1)^2$ factor comú a partir del tercer sumand del segon membre de la igualtat:

$$p_n(x) = p_n(1) + p_n'(1)(x-1) + (x-1)^2\left[\frac{p_n''(1)}{2!} + \cdots + \frac{p_n^{(2n)}(1)}{(2n)!}(x-1)^{2n-2}\right] \tag{3.19}$$

Si diem $q_n(x) = \frac{p_n''(1)}{2!} + \cdots + \frac{p_n^{(2n)}(1)}{(2n)!}(x-1)^{2n-2}$, l'expressió (3.19) és

$$p_n(x) = p_n(1) + p_n'(1)(x-1) + (x-1)^2 q_n(x)$$

Deduïm d'aquí que la resta que buscàvem és:

$$r_n(x) = p_n(1) + p_n'(1)(x-1) \tag{3.20}$$

Només ens cal, doncs, conèixer $p_n(1)$ i $p_n'(1)$. Anem a calcular-los

$$\begin{array}{ll} p_n(x) = nx^{2n} - 3nx^n + 2n & p_n(1) = n - 3n + 2n = 0 \\ p_n'(x) = 2n^2x^{2n-1} - 3n^2x^{n-1} & p_n'(1) = 2n^2 - 3n^2 = -n^2 \end{array}$$

Substituïm en (3.20) i obtenim la resta de dividir $p_n(x)$ per $(x-1)^2$

$$r_n(x) = p_n(1) + p_n'(1)(x-1) = 0 + (-n^2)(x-1) = -n^2x + n^2$$

b) El desenvolupament de Taylor de $p_n(x)$ en $\alpha = -1$ és

$$p_n(x) = p_n(-1) + \frac{p_n'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{p_n''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{p_n'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots$$

$$\cdots + \frac{p_n^{(2n)}(-1)}{(2n)!}(x+1)^{2n}$$

Procedim de forma anàloga a l'apartat (a) i obtenim

$$p_n(x) = p_n(-1) + p_n'(-1)(x+1) + \frac{p_n''(-1)}{2!}(x+1)^2 + m_n(x)(x+1)^3$$

per a un cert polinomi $m_n(x) \in \mathbb{R}[x]$.
Així doncs, la resta de dividir $p_n(x)$ per $(x+1)^3$ és

$$s_n(x) = p_n(-1) + p_n'(-1)(x+1) + \frac{p_n''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

Ens cal, doncs, conèixer $p_n(-1)$, $p_n'(-1)$ i $p_n''(-1)$. Calculem les derivades de $p(x)$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= nx^{2n} - 3nx^n + 2n \\ p_n'(x) &= 2n^2x^{2n-1} - 3n^2x^{n-1} \\ p_n''(x) &= 2n^2(2n-1)x^{2n-2} - 3n^2(n-1)x^{n-2} \end{aligned}$$

Avaluem, en $\alpha = -1$, $p_n(x)$, $p_n'(x)$ i $p_n''(x)$. Si n és parell,

$$\begin{aligned} p_n(-1) &= n - 3n + 2n = 0 \\ p_n'(-1) &= -2n^2 + 3n^2 = n^2 \\ p_n''(-1) &= 2n^2(2n-1) - 3n^2(n-1) = n^3 + n^2 = n^2(n+1) \end{aligned}$$

D'on, si n és parell, la resta demanada és

$$s_n(x) = 0 + n^2(x+1) + \frac{n^2(n+1)}{2}(x+1)^2$$

Operant, obtenim

$$s_n(x) = \frac{n^2(n+1)}{2}x^2 + n^2(n+2)x + \frac{n^2(n+3)}{2}\,.$$

Si n és senar,

$$\begin{aligned} p_n(-1) &= n + 3n + 2n = 6n \\ p_n'(-1) &= -2n^2 - 3n^2 = -5n^2 \\ p_n''(-1) &= 2n^2(2n-1) + 3n^2(n-1) = (7n-5)n^2 \end{aligned}$$

D'on, si n és senar, hem obtingut

$$s_n(x) = 6n - 5n^2(x+1) + \frac{(7n-5)n^2}{2}(x+1)^2$$

Operant, $s_n(x) = \frac{1}{2}n^2(7n-5)x^2 + (7n^3 - 10n^2)x + \frac{1}{2}(7n^3 - 15n^2 + 12n)$.

• • •

3. Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi de grau 4 que té 100 com a arrel triple i verifica $p(0) = 2 \cdot 10^8$ i $p^{(\mathrm{IV})}(100) = 24$. Calculeu $p'''(100)$.

Resolució.

Donat que $a = 100$ és una arrel triple de $p(x)$ tenim $p(100) = p'(100) = p''(100) = 0$. Així doncs, el desenvolupament de Taylor del polinomi que busquem en $\alpha = 100$ és:

$$p(x) = \frac{p'''(100)}{3!}(x-100)^3 + \frac{p^{(\mathrm{IV})}(100)}{4!}(x-100)^4$$

Substituïm $p^{(\mathrm{IV})}(100) = 24$ i imposem $p(0) = 2 \cdot 10^8$,

$$2 \cdot 10^8 = p(0) = \frac{p'''(100)}{3!}(-100)^3 + 10^8$$

D'on

$$10^8 = -\frac{p'''(100)}{3!}10^6 \Longrightarrow 10^2 = -\frac{p'''(100)}{6}$$

Finalment obtenim $p'''(100) = -600$.

Observació. Aquest és un exercici on es veu la utilitat del desenvolupament de Taylor d'un polinomi. Es pot intentar donar la solució del problema tot considerant $p(x)$ un polinomi de la forma $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ i resolent el sistema

$$\left.\begin{aligned} &p(100) = 0 \\ &p'(100) = 0 \\ &p''(100) = 0 \\ &p^{\mathrm{IV}}(100) = 24 \\ &p(0) = 2 \cdot 10^8 \end{aligned}\right\}$$

amb la qual cosa l'exercici es fa llarg i pesat de càlculs.

3.5.2 Problemes proposats

1. Trobeu la resta de dividir el polinomi $p(x) = x^{999} + x^{99} + x^9$ per

a) $(x-1)^3$.

b) $(x+1)^2$.

Solució.

a) $498501x^2 - 995895x + 497397$.

b) $1107x + 1104$.

2. Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi tal que 2 és arrel triple de $p(x)$ i la resta de dividir $p(x)$ per $(x-2)^3$ és $12x^3 - 72x^2 + 144x - 96$, què val $p'''(2)$?

Solució. $p'''(2) = 72$.

3.6 Miscel·lània

3.6.1 Problemes resolts

1. Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi de grau més gran o igual que 4, tal que la resta de dividir $p(x)$ per x^2+1 és $2x$ i la resta de dividir $p(x)$ per x^2-1 és $x-1$. Quina és la resta de dividir $p(x)$ per x^4-1?

Resolució.

Dir que la resta de dividir $p(x)$ per x^2+1 és $2x$ és equivalent a dir que existeix un cert polinomi $q_1(x)$ tal que es verifica la igualtat següent

$$p(x) = (x^2+1)q_1(x) + 2x \tag{3.21}$$

Anàlogament, si la divisió de $p(x)$ per x^2-1 té com a resta $x-1$ tenim:

$$p(x) = (x^2-1)q_2(x) + x - 1 \tag{3.22}$$

Finalment, dividim $p(x)$ per x^4-1 i obtenim una expressió

$$p(x) = (x^4-1)q(x) + r(x) \tag{3.23}$$

on la resta $r(x)$ és un polinomi de grau estrictament més petit que el grau del divisor, és a dir, en aquest cas

$$\mathrm{gr}(r(x)) < 4 \Longrightarrow r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Donem valors a la x i substituïm a (3.21), (3.22), (3.23). D'aquesta forma construirem un sistema d'equacions que ens permetrà calcular a, b, c, d.

$$2i \underset{(4.11)}{=} p(i) \underset{(4.13)}{=} -ai - b + ci + d \tag{3.24}$$

$$-2i \underset{(4.11)}{=} p(-i) \underset{(4.13)}{=} ai - b - ci + d \tag{3.25}$$

$$0 \underset{(4.12)}{=} p(1) \underset{(4.13)}{=} a + b + c + d \tag{3.26}$$

$$-2 \underset{(4.12)}{=} p(-1) \underset{(4.13)}{=} -a + b - c + d \tag{3.27}$$

Sumant (3.24) i (3.25), $0 = -2b + 2d \Rightarrow b = d$.

Restant (3.24) i (3.25), $4i = -2ai + 2ci \Rightarrow 2 = c - a$.

Sumant (3.26) i (3.27), $-2 = 2b + 2d \Rightarrow -1 = b + d$.

Restant (3.24) i (3.25), $2 = 2a + 2c \Rightarrow 1 = a + c$.

D'on $a = b = d = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$. I, finalment,

$$r(x) = \frac{1}{2}(-x^3 - x^2 + 3x - 1)\,.$$

• • •

2. Trobeu un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau 5, tal que $(x-3)^3$ divideixi $p(x) - 648$ i $(x+3)^3$ divideixi $p(x) + 648$.

Resolució.

És equivalent dir que $(x-3)^3$ divideix $p(x) - 7$ que dir que existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ que verifica la igualtat

$$p(x) - 648 = (x-3)^3 q(x) \tag{3.28}$$

Anàlogament, es verifica

$$p(x) + 648 = (x+3)^3 s(x) \tag{3.29}$$

per a un cert polinomi $s(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Derivem en (3.28):

$$p'(x) = 3(x-3)^2 q(x) + (x-3)^3 q'(x) = (x-3)^2[3q(x) + (x-3)q'(x)]$$

D'on deduïm que $(x-3)^2$ divideix $p'(x)$.

Derivem en (3.29):

$$p'(x) = 3(x+3)^2 s(x) + (x+3)^3 s'(x) = (x+3)^2[3s(x) + (x+3)s'(x)]$$

Així doncs, $(x+3)^2$ també divideix $p'(x)$ i, per tant, $(x-3)^2(x+3)^2$ divideix $p'(x)$.

Com que la descomposició de $p'(x)$ en factors primers és única, llevat d'ordre i multiplicar per un escalar, tenim doncs

$$p'(x) = (x-3)^2(x+3)^2 t(x)$$

Recordem però, que gr $(p(x)) = 5$, o sigui que gr $(p'(x)) = 4$, amb la qual cosa tenim que gr $(t(x)) = 0$, o sigui $t(x)$ és constant.

Així doncs,

$$p'(x) = k(x-3)^2(x+3)^2 \quad \text{per a una certa } k \in \mathbb{R}$$

Integrant,

$$\begin{aligned} p(x) &= k\int (x-3)^2(x+3)^2 dx = k\int (x^2-9)^2 dx = k\int (x^4 - 18x^2 + 81) dx = \\ &= k\left(\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right) + c \end{aligned}$$

Imposem ara que $x-3$ divideixi $q_1(x) = p(x) - 648$ i que $x+3$ divideixi $q_2(x) = p(x) + 648$. Equivalentment, imposem $q_1(3) = 0$ i $q_2(-3) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= q_1(3) = k\frac{648}{5} + c - 648 \\ 0 &= q_2(-3) = -k\frac{648}{5} + c + 648 \end{aligned}$$

D'on deduïm $c = 0$ i $k = 5$. Finalment hem obtingut

$$p(x) = x^5 - 30x^3 + 405x$$

• • •

3. Calculeu la resta de dividir per $(x-1)$ els polinomis següents:

a) $p_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \ldots + 2x^2 + x$

b) $q_n(x) = nx^n - (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-3}3x^2 + (-1)^{n-2}2x^2 + (-1)^{n-1}x$

Resolució.

Sigui $p(x)$ un polinomi qualsevol. Si $q(x)$ és el quocient de dividir $p(x)$ per $x-1$ i $r(x)$ és la resta d'aquesta divisió, es verifica

$$p(x) = (x-1)q(x) + r(x) \tag{3.30}$$

Donat que gr $(r(x)) <$gr $(x-1)$ tenim que $r(x)$ és un polinomi de grau 0, és a dir, $r(x)$ és una constant. Posem $r(x) = k$, per a una certa $k \in \mathbb{R}$. Fem en (3.30) la substitució $x = 1$:

$$p(1) = r(1) = k$$

Així doncs, per trobar les restes que ens demana l'enunciat només hem d'avaluar en (3.30) els polinomis donats.

a) Comencem amb els polinomis $p_n(x)$:

$$p_n(1) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

D'on deduïm que la resta de dividir $p_n(x)$ per $x-1$ és $\frac{n^2+n}{2}$.

b) Fem el mateix amb els polinomis $q_n(x)$:

$$q_n(1) = n - (n-1) + (n-2) - (n-3) + \cdots + (-1)^{n-3}3 + (-1)^{n-2}2 + (-1)^{n-1}$$

Estudiem per separat el cas en que n sigui parell o senar.
Si n és parell, observem

$$q_n(1) = \underbrace{n-(n-1)}_{+1} + \underbrace{(n-2)-(n-3)}_{+1} + \cdots + \underbrace{4-3}_{+1} + \underbrace{2-1}_{+1} = \frac{n}{2}$$

Si n és senar, llavors

$$q_n(1) = \underbrace{n-(n-1)}_{+1} + \underbrace{(n-2)-(n-3)}_{+1} + \cdots + \underbrace{3-2}_{+1} + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

Podem resumir aquests dos resultats de la forma següent

$$q_n(1) = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

on $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow E(x)$ és la funció que assigna a qualsevol nombre $x \in \mathbb{R}$ la seva part entera.
Finalment doncs, deduïm que la resta de dividir $q_n(x)$ per $x-1$ és $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

• • •

4. Donats els polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \\ q(x) &= x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \end{aligned}$$

a) Trobeu el màxim comú divisor d'ambdós polinomis per l'algorisme d'Euclides.

b) Sigui $n(x) = \frac{m.c.m.(p(x),q(x))}{m.c.d.(p(x),q(x))}$. Calculeu el desenvolupament de Taylor de $n(x)$ en $\alpha = 1$.

Resolució.

a) Apliquem l'algorisme d'Euclides

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \quad \Big| \; x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$\begin{array}{l|l}
-x^4+2x^3 \qquad -2x+1 & \quad 1 \\
\hline
\quad -3x^3+5x^2+3x-5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3+ \qquad 2x-1 & -3x^3+5x^2+3x-5 \\
\cline{2-2}
-x^4+\frac{5}{3}x^3+x^2-\frac{5}{3}x & -\frac{1}{3}x+\frac{1}{9} \\
\cline{1-1}
\quad -\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}x-1 & \\
\quad +\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{9}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9} & \\
\cline{1-1}
\qquad \frac{4}{9}x^2-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}(x^2-1) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
-3x^3+5x^2+3x-5 & x^2-1 \\
\cline{2-2}
3x^3 \qquad -3x & -3x+5 \\
\cline{1-1}
\qquad 5x^2 \qquad -5 & \\
\qquad -5x^2 \qquad +5 & \\
\cline{1-1}
\qquad / \qquad\quad / &
\end{array}$$

Així doncs, $m.c.d.(p(x),q(x)) = x^2-1$.

b) Calculem $m.c.m.(p(x),q(x))$:

$$\begin{aligned}
m.c.m.\,(p(x),q(x)) &= \frac{p(x)q(x)}{m.c.d.(p(x),q(x))} \\
&= \frac{(x^4-5x^3+5x^2+5x-6)(x^4-2x^3+2x-1)}{x^2-1} \\
&= (x^2-2x+1)(x^4-5x^3+5x^2+5x-6) \\
&= x^6-7x^5+16x^4-10x^3-11x^2+17x-6
\end{aligned}$$

Trobem ara $n(x)$:

$$\begin{aligned}
n(x) &= \frac{m.c.m.(p(x),q(x))}{m.c.d.(p(x),q(x))} = \\
&= \frac{x^6-7x^5+16x^4-10x^3-11x^2+17x-6}{x^2-1} \\
&= x^4-7x^3+17x^2-17x+6
\end{aligned}$$

Observem que $n(1)=0$. Calculem les successives derivades de $n(x)$ i les avaluem en $x=1$,

$$\begin{array}{ll}
n'(x) = 4x^3-21x^2+34x-17 & n'(1)=0 \\
n''(x) = 12x^2-42x+34 & n''(1)=4 \\
n'''(x) = 24x-42 & n'''(1)=-18 \\
n^{\mathrm{IV}}(x) = 24 & n^{\mathrm{IV}}(1)=24
\end{array}$$

Recordem que el desenvolupament de Taylor de $n(x)$ en $\alpha = 1$ és:

$$n(x) = n(1) + \frac{n'(1)}{1!}(x-1) + \frac{n''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{n'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{n^{\mathrm{IV}}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Substituïm i arribem a:

$$n(x) = 2(x-1)^2 - 3(x-1)^3 + (x-1)^4 .$$

• • •

5. Trobeu els polinomis $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau n que verifiquen

$$p(r) = p(r+1) = \cdots = p(r+(n-1)) = 1$$

per a un cert $r \in \mathbb{N}$.

Resolució.

Fent la divisió de $p(x)$ pels polinomis $x-r, x-(r+1), \ldots, x-(r+(n-1))$ tenim:

$$\begin{aligned} &p(x) = (x-r)q_1(x) + 1 \\ &p(x) = (x-(r+1))q_2(x) + 1 \\ &\vdots \\ &p(x) = (x-(r+(n-1)))q_n(x) + 1 \end{aligned}$$

Si restem les dues primeres equacions obtenim:

$$0 = (x-(r+1))q_2(x) - (x-r)q_1(x)$$

D'on $(x-r)q_1(x) = (x-(r+1))q_2(x)$. I com que $(x-(r+1))$ no divideix $x-r$ necessàriament, $(x-(r+1))$ divideix $q_1(x)$. Fem el mateix amb les altres equacions, és a dir, restem a la k-èsima equació (per a $k = 2, \ldots, n$) la primera:

$$0 = (x-(r+k-1))q_k(x) - (x-r)q_1(x) , \qquad k = 2, \ldots, n$$

I raonant igual que abans, $x-(r+k-1)$, divideix $q_1(x)$, $k = 2, \ldots, n$. Per tant,

$$q_1(x) = (x-(r+1)) \ldots (x-(r+(n-1)))s(x)$$

Però, atès que gr $(p(x)) = n$ i

$$p(x) = (x-r)q_1(x) + 1$$

deduïm que gr $(q_1(x)) = n-1$ i, aleshores, gr $(s(x)) = 0$, o sigui $s(x) = \lambda$ per a un cert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Així doncs, els polinomis que verifiquen l'enunciat són els següents:

$$p_\lambda(x) = \lambda(x-r)(x-(r+1)) \ldots (x-(r+(n-1))) + 1 ,$$

essent $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsevol.

3.6.2 Problemes proposats

1. Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si la resta de dividir $p(x)$ per $x-1$ és 1, per $x-2$ és 2 i per $x-3$ és 3, quina és la resta de dividir $p(x)$ per $x^3-6x^2+11x-6$?

Solució. $r(x)=x$.

2. Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu quadrada qualsevol, i sigui $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matriu identitat. Sigui $S \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu invertible. Considerem els polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(A-xI) \\ q(x) &= \det(SAS^{-1}-xI) \end{aligned}$$

Existeix alguna relació entre $p(x)$ i $q(x)$?

Solució. $p(x)=q(x)$.

3. Trobeu els polinomis mònics de grau 5 tals que m.c.d. $(p(x),p'(x))=(x-2)^3$, $p(1)=10$ i $p(3)=196$.

Solució. Només n'hi ha un: $p(x)=2x^5-15x^4+47x^3-40x^2+16$.

4. Per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{N}$ la resta de dividir el polinomi $p(x)=x^{\alpha+7}-3x^{\alpha+6}+3x^{\alpha+5}-x^{\alpha+4}+18x^2-48x+32$ per $(x-1)^3$ té una arrel doble? Quant val?

Solució. Per a tot $\alpha \in \mathbb{N}$, i val $4/3$.

Capítol 4

Matrius i sistemes d'equacions lineals

4.1 Introducció

L'origen de les matrius el podem trobar en la resolució de problemes que condueixen a sistemes lineals d'equacions. En el Jiuzhang Suanshu (*Nou capítols sobre l'art matemàtic*), una obra anònima de la primera època de la dinastia Han a la Xina (aproximadament d'entre 200 aC i 100 aC), es planteja un sistema de tres equacions amb tres incògnites, les dades del qual es disposen en forma rectangular. Per a resoldre aquest sistema s'aplica el que avui anomenaríem "eliminació gaussiana" treballant per columnes.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) va fer importants descobriments en la teoria de sistemes d'equacions lineals i introduint una notació que es correspon amb la forma actual d'indicar, amb subíndexs, els elements d'una matriu a partir de la fila i la columna que ocupen.

La paraula *matriu* la va utilitzar per primer cop James Joseph Sylvester (1850), tot i que les matrius ja s'utilitzaven de forma abstracta en una memòria anterior de Cayley, on es tracten les operacions bàsiques amb matrius i el càlcul d'inverses. L'any 1854 va establir l'anomenat "teorema de Cayley-Hamilton" per a matrius quadrades. El va demostrar en el cas de matriu d'ordre 2 o 3. La demostració per a matrius d'ordre 4 es diu a William Rowan Hamilton (1805-1865).

El concepte de rang d'una matriu va ser introduït per Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), mitjançant determinants. També va provar diferents resultats sobre matrius, incloent-hi una demostració del cas general del "teorema de Cayley-Hamilton".

A partir de la segona meitat del segle XIX bona part de l'estudi sobre matrius s'ha dedicat a casos en què els seus elements pertanyien a un cos qualsevol, o eren enters.

Tot i amb això, no hi ha cap llibre específicament dedicat a les matrius fins al segle XX. La teoria de matrius es pot considerar, doncs, recent. Avui en dia les matrius estan considerades un tòpic de gran importància, ja que constitueixen una eina matemàtica molt valuosa. Les matrius s'utilitzen en disciplines com són ara el càlcul numèric, equacions diferencials i en derivades parcials, estadística, economia, informàtica, ...

4.2 Matrius

Tractarem només les matrius amb coeficients en un cos commutatiu K, el qual habitualment serà, o bé el cos real $\mathbb{R}$, o bé el cos complex $\mathbb{C}$.
Anomenarem matriu d'ordre $n \times m$ a coeficients en el cos K a un conjunt de $n \cdot m$ elements del cos distribuïts en n files i m columnes i que notarem per

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \qquad a_j^i \in K .$$

Observeu que l'element a_j^i està a la fila i, i a la columna j. Notarem $M_{n\times m}(K)$ el conjunt de les matrius d'ordre $n \times m$ a coeficients en el cos K. En el cas particular on $n = m$, el notarem simplement $M_n(K)$.

Operacions amb matrius

Suma. Donades dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, amb $A, B \in M_{n\times m}(K)$ (és a dir, del mateix ordre) definim la seva suma com la matriu

$$C = (c_i^j) = (a_i^j + b_i^j) .$$

En el conjunt $M_{n\times m}(K)$, l'operació suma verifica les propietats següents.

1. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. Commutativa: $A + B = B + A$.

3. Existència d'element neutre, que és la matriu 0 (els elements de la qual són tots nuls), ja que $A + 0 = A$ per a qualsevol matriu $A \in M_{n\times m}(K)$. Aquesta matriu s'anomena matriu nul·la.

4. Existència d'element simètric: donada una matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times m}(K)$ existeix $-A$ de forma que $A + (-A) = 0$ (en efecte, només cal prendre $-A = (-a_i^j)$).

És a dir, que $M_{n\times m}(K)$, amb l'operació suma, és un grup commutatiu.

Producte. Donades dues matrius $A \in M_{n\times m}(K)$, $B \in M_{m\times p}(K)$, això és, $A = (a_i^j)$ i $N = (b_i^j)$ d'ordre $n \times m$ i $m \times p$, respectivament, definim el seu producte per

$$C = (c_i^j) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_i^k b_k^j \right) .$$

L'operació producte verifica les propietats següents.

1. Associativa: $(AB)C = A(BC)$.

2. Distributiva respecte de la suma: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.

3. En el cas $n = m$, existeix l'element unitat, que és la matriu $I_n = (\delta_i^j)$, amb $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$ i $\delta_i^i = 1$, ja que $AI_n = I_nA = A$ per a qualsevol matriu $A \in M_n(K)$. La matriu $I_n \in M_n(K)$ rep el nom de matriu identitat d'ordre n.

L'operació producte no és commutativa. En realitat, si $A \in M_{n\times m}(K)$ i $B \in M_{m\times p}(K)$, podem efectuar el producte AB, però el producte BA només pot fer-se si $n = p$. En el cas de dues matrius quadrades A, B del mateix ordre es poden efectuar els productes AB i BA, però les matrius així obtingudes no tenen per què coincidir.
Així, $M_n(K)$ és un anell (no commutatiu) amb la suma i el producte.
És possible que, sense que ni A ni B siguin matrius nul·les, el producte AB o BA (o ambdós, en el cas en què tinguin sentit) siguin la matriu nul·la.

Producte per un escalar. Donada una matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times m}(K)$ i un element qualsevol del cos $\lambda \in K$ definim el producte del escalar λ per la matriu A de la manera següent:

$$\lambda(a_i^j) = (\lambda a_i^j)\,.$$

L'operació producte per escalars de K verifica les propietats següents.

1. Associativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

2. Distributiva respecte de la suma de matrius: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

3. Distributiva respecte de la suma d'escalars: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

4. $1 \cdot A = A$.

Així doncs, $M_{n\times m}(K)$ és un K-espai vectorial (de dimensió nm).

Alguns tipus especials de matrius

Anomenarem *matriu triangular superior* a una matriu $A = (a_i^j)$ tal que $a_i^j = 0$, per a tot $i > j$.
Anomenarem *matriu triangular inferior* a una matriu $A = (a_i^j)$ tal que $a_i^j = 0$, per a tot $i < j$.
Anomenarem *matriu diagonal* a una matriu $A = (a_i^j)$ tal que $a_i^j = 0$, per a tot $i \neq j$.
Donada una matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times m}(K)$ anomenarem *matriu transposada* de A, i la notarem A^t, a la matriu definida de la forma

$$A^t = (a_j^i) \in M_{m\times n}(K)\,.$$

És a dir, A^t és la matriu que s'obté a partir de A canviant files per columnes. Es verifiquen les igualtats següents.

1. $(A^t)^t = A$.

2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

3. $(A+B)^t = A^t + B^t$.

4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Donada una matriu $A \in M_n(K)$ direm que és simètrica si, i només si, $A = A^t$; i direm que és antisimètrica si, i només si, $A = -A^t$.

Rang d'una matriu

Tota matriu A es pot transformar en una matriu r-esglaonada per files, és a dir, de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \dots & 0 & * & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \end{array}$$

on $*$ indica un element diferent de zero. Això es pot aconseguir mitjançant transformacions elementals de files, és a dir, qualsevol de les manipulacions següents:

1. Permutar entre elles dues files.

2. Multiplicar una fila per un escalar no nul.

3. Substituir una fila per la suma d'ella mateixa amb una altra multiplicada per un escalar.

S'anomena transformació elemental de columnes a qualsevol de les manipulacions següents:

1. Permutar entre elles dues columnes.

2. Multiplicar una columna per un escalar no nul.

3. Substituir una columna per la suma d'ella mateixa amb una altra multiplicada per un escalar.

Fent transformacions elementals de columnes, podem obtenir, a partir de la matriu A, una matriu de la forma

$$
r' \left\{ \vphantom{\begin{matrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \end{matrix}} \right.
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
* & 0 & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & * & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & & * & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

que s'anomena matriu r'-esglaonada per columnes.

És un resultat conegut que $r = r'$ i a aquest valor se l'anomena rang de la matriu A.

Tant les transformacions elementals de files com les transformacions elementals de columnes conserven el rang. En particular, el rang d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

Per a aquells estudiants familiaritzats amb els conceptes d'espais vectorials, independència lineal i dimensió de subespais, es pot donar també una altra definició de rang d'una matriu, que coincideix amb l'anterior: donada una matriu $A \in M_{m\times n}(K)$, s'anomena rang de A a la dimensió del subespai de K^m generat pels vectors columna de A (que coincideix amb la dimensió del subespai de K^n generat pels vectors fila de A).

Teorema de Cayley-Hamilton

Donat un polinomi $p(t) \in K[t]$ i una matriu $A \in M_n(k)$, denotarem per $p(A)$ a:

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m,$$

si $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$. S'anomena polinomi mínim de A al polinomi mònic de grau mínim d'entre els que verifiquen $p(A) = 0$ (aquest polinomi sempre existeix i és únic). Un enunciat possible pel Teorema que ens ocupa és el següent: "El polinomi mínim de A divideix el polinomi característic de A"(vegeu el capítol 3 del llibre *Espais vectorials. Aplicacions lineals. Diagonalització*, per exemple, per a la definició del polinomi característic. Aquí només ens interessa que aquest polinomi té grau n). Com a conseqüència, el grau del polinomi mínim és més petit o igual que n.

Aquest teorema permet afirmar que, donada una matriu invertible, quadrada $A \in M_n(k)$ es pot escriure la seva inversa, A^{-1}, de la forma

$$A^{-1} = \lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1}$$

(és a dir, per als lectors habituals al llenguatge d'espais vectorials, com a combinació lineal de les matrius I_n, $A, \ldots, A^{n-1}$). D'aquí es dedueix una altra forma de determinar la inversa d'una matriu (vegeu exercici 5).

4.2.1 Problemes resolts

1. Calculeu

$$\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolució. Fem primer la suma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multipliquem ara per l'escalar:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Finalment fem el producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 & 10/3 & 5 \\ 6 & 8/3 & -6 \end{pmatrix}$$

que és el resultat final. També es pot escriure com:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & 10 & 15 \\ 18 & 8 & -18 \end{pmatrix}.$$

• • •

2. Trobeu quines matrius M satisfan l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolució. En primer lloc observem que la matriu M ha de tenir 3 files i 2 columnes. Si $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 \end{pmatrix}$, per la definició de producte de matrius obtenim les equacions

$$\left\{\begin{aligned} 2m_1 + m_3 - m_5 &= 0 \\ 2m_2 + m_4 - m_6 &= 0 \\ -2m_1 - m_3 + m_5 &= 0 \\ -2m_2 - m_4 + m_6 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Així, veiem que només cal que es compleixin dues condicions:

$$m_5 = 2m_1 + m_3 \quad \text{i} \quad m_6 = 2m_2 + m_4 \,.$$

Per tant, tota matriu M de la forma

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \\ 2m_1 + m_3 & 2m_2 + m_4 \end{pmatrix}$$

amb m_1, m_2, m_3, m_4 qualssevol satisfan l'equació donada.

• • •

3. Estudieu si són, o no, certes les igualtats següents:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A(B+C) - (A+C)B - C(A-B) = 0$,

on A, B, C són matrius quadrades d'ordre n.

Resolució. (a) Si calculem $(A+B)^2$, obtenim:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \,.$$

Així, per a que sigui certa la primera igualtat, cal que $BA+AB = 2AB$. Equivalentment, $AB = BA$. És a dir, només quan es verifiqui aquesta condició ($AB = BA$) serà certa la igualtat donada.

(b) Calculem el primer membre de la igualtat, $A(B+C)-(A+C)B-C(A-B) = AB + AC - AB - CB - CA + CB = AC - CA$. Així doncs, aquesta igualtat és vàlida si, i només si, $AC - CA = 0$. Equivalentment, si, i només si, $AC = CA$ (observeu que aquí la matriu B no intervé).

• • •

4. a) Esglaoneu per files la matriu A_α següent, segons els diferents valors de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Determineu el rang de la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució.

a) Apliquem a la matriu A_α les transformacions elementals següents:
   - Sumem a la fila 2 la fila 1 multiplicada per $-\alpha$.
   - Sumem a la fila 3 la fila 1 multiplicada per -1.
   - Sumem a la fila 3 la fila 2 multiplicada per $-\alpha$.
   - Sumem a la fila 4 la fila 2 multiplicada per -1.

   Llavors:

$$A_\alpha \underset{f_2'=f_2+(-\alpha)f_1}{\overset{\sim}{\uparrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_3'=f_3+(-1)f_1 \\ f_3'=f_3+(-\alpha)f_2}}{\overset{\sim}{\uparrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{f_4'=f_4+(-1)f_2}{\overset{\sim}{\uparrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1-2\alpha+\alpha^3 \\ 0 & 0 & -2+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

   Si $-2+\alpha^2=0$, és a dir, $\alpha=\sqrt{2}$ o $\alpha=-\sqrt{2}$, la matriu ja està esglaonada (és una matriu 3-esglaonada).

   Si $1-2\alpha+\alpha^3=0$, és a dir, $\alpha=1$ o $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, o $\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ fem la transformació elemental següent:
   - Intercanviem les files 3 i 4 i obtenim la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & -2+\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     que és 3-esglaonada.

   Si $1-2\alpha+\alpha^3\neq 0$, és a dir, $\alpha\neq 1$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $\alpha\neq\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, llavors fem les transformacions elementals següents:
   - Multipliquem la fila 4 per $1-2\alpha+\alpha^3$.
   - Sumem a la fila 4 la fila 3 multiplicada per $2-\alpha^2$

   Llavors la darrera matriu es transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1-2\alpha+\alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   que és 3-esglaonada.

b) Fem les transformacions elementals següents a aquesta matriu, per tal d'esglaonar-la:

– Sumem, a la fila 2, la fila 1 multiplicada per $-\alpha$
– Sumem, a la fila 3, la fila 1 multiplicada per $-\beta$

Llavors:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 1-\alpha\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 1-\beta & 1-\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$, fem ara la transformació elemental següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 1-\beta & 1-\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1-\beta & 1-\alpha\beta \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(és a dir, intercanviem les files 2 i 3).

Aquesta matriu ja està esglaonada i té rang 2, per a qualsevol valor $\beta \in \mathbb{R}$, $A = 2$.

Finalment, suposem $\alpha \neq 0$. Apliquem ara les transformacions elementals següents:

– Multipliquem la fila 3 per α (observem que això no ho hauríem pogut fer si $\alpha = 0$).
– Sumem a la fila 3 la fila 2 multiplicada per $1-\beta$ (observem que sempre podem fer-ho, independentment del valor de la constant β).

Tenim ara

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 1-\beta & 1-\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha(1-\beta) & \alpha(1-\alpha\beta) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veiem que el rang de la matriu és, en aquest cas, 3.

• • •

5. Considereu la matriu (invertible): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determineu escalars $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que $A^{-1} = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2$.

Resolució. Sabem que existeixen escalars $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tals que $A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_3 = 0$. És a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

D'aquesta igualtat deduïm: $a_2 = -1$, $a_1 = 2$ i $a_0 = -2$.

Per tant, $A^3 - A^2 + 2A - 2I_3 = 0$ i podem reescriure l'expressió anterior de la forma $A(A^2 - A + 2I_3) = 2I_3$ o bé $A\left[\frac{1}{2}(A^2 - A + 2I_3)\right] = I_3$, d'on concloem que:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - A + 2I_3)\,.$$

4.2.2 Problemes proposats

1. Efectueu les operacions següents:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 9 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & 11 \\ 0 & -13 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{4}(1 \quad -1)\right]^t$.

(c) $\left[5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 11 & 1 & 11 \\ 0 & -13 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 20 \\ -15 & 10 & 35 & 5 \\ 0 & -15 & -20 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -5 & 12 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ -8 & 20 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Justifiqueu que, si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n, tals que $AB = BA$, aleshores es verifica:

$$(A+B)^k = A^k + \binom{k}{1} A^{k-1}B + \binom{k}{2} A^{k-2}B + \cdots + \binom{k}{k-1} AB^{k-1} + B^k\,.$$

3. Justifiqueu en quin/quins dels casos següents les equacions matricials següents tenen solució única:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $M \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solució. (a) i (c).

4. Trobeu totes les matrius $X \in M_3(\mathbb{R})$ que commuten amb la matriu A (és a dir, $AX = XA$), essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució. $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 + x_3 & x_2 \\ 0 & 2x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, amb $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

5. Proveu que si A és una matriu antisimètrica també ho és $A + A^t$, i que si A és una matriu simètrica també ho és $A - A^t$.

6. Calculeu el rang de les matrius següents, reduint-les prèviament a matrius esglaonades per files

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solució. $\operatorname{rg} A = 3$ i $\operatorname{rg} B = 2$.

4.3 Sistemes d'equacions lineals

Tot sistema d'equacions lineals del tipus

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1x^1 + \cdots + a_n^1x^n = b^1 \\ \dots \\ a_1^mx^1 + \cdots + a_n^mx^n = b^m \end{array}\right. \tag{$*$}$$

es pot escriure en la forma d'una equació matricial del tipus $AX = B$ on

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

essent A la matriu del sistema i B la matriu dels termes independents.

En general, si $AX = B$ és una equació matricial, amb $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{m\times p}(K)$ matrius donades, trobar el conjunt de solucions de $AX = B$ equival a resoldre simultàniament p sistemes d'equacions lineals del tipus (*) amb la mateixa matriu del sistema.

L'equació matricial $AX = B$ té solució si, i només si, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$. En aquest cas:

$\{\text{solucions de } AX = B\} = X_0 + F$ on X_0 és una solució particular de $AX = B$, és a dir, $AX_0 = B$; i

$$F = \{\text{solucions de } AX = 0\}$$

F és un subespai vectorial de $M_{n\times p}(K)$ i, si $r = \operatorname{rang} A$, $\dim F = (n-r)p$.

Observeu que si $r = n$ (nombre de columnes de A), llavors la solució és única.

Direm que dues equacions matricials $A_1X = B_1$ i $A_2X = B_2$ amb $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(K)$, $B_1, B_2 \in M_{m\times p}(K)$ són equivalents si tenen les mateixes solucions.

Donada l'equació matricial $A_1X = B_1$, amb $r = \operatorname{rang} A_1 = \operatorname{rang}(A_1|B_1)$ a partir de la matriu ampliada $(A_1|B_1)$ sempre es pot arribar mitjançant transformacions elementals de files (i si calgués permutacions de columnes) a una matriu del tipus

$$(A_2|B_2) = \left(\begin{array}{cc|c} I_r & P & Z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{on} \qquad I_r = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & {\scriptstyle (r)} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

En el cas de no haver fet cap permutació de columnes el sistema $A_1X = B_1$ és equivalent a $A_2X = B_2$ i les solucions (comunes) són:

$$X = \left(\frac{Z - PX_2}{X_2}\right) \qquad \text{essent } X_2 \in M_{m\times(n-r)}(K) \text{ arbitrària}$$

Si $r = n$ tenim una única solució: $X = Z$.

Si s'ha efectuat alguna permutació de columnes a la matriu A_1, llavors l'equació matricial $A_1X = B_1$ no és equivalent a $A_2X = B_2$ però les solucions de $A_1X = B_1$ es poden obtenir a partir de les de $A_2X = B_2$ de la forma següent: si X_2 és una solució de $A_2X = B_2$, llavors la matriu X_1 que resulta d'efectuar les permutacions de files anàlogues a les "de columnes" efectuades a la matriu A_1 per obtenir A_2, és solució de l'equació $A_1X = B_1$. El cas de l'equació matricial $XA = B$ es pot resoldre convertint-la en una del tipus anterior. Només cal observar

$$XA = B \Longleftrightarrow (XA)^t = B^t \Longleftrightarrow A^tX^t = B^t$$

4.3.1 Problemes resolts

1. Discutiu, segons els valors de a, b i c l'existència de solucions per al sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + bz &= 1 \\ bx + ay + bz &= 1 \\ bx + by + az &= c \end{aligned}\right\}$$

Resolució. En aquest cas la matriu A del sistema i la matriu ampliada $(A\,|\,B)$ són les següents

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \qquad (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \\ b & b & a & c \end{array}\right).$$

Mitjançant transformacions elementals de files esglaonem la matriu A del sistema i la matriu ampliada $(A\,|\,B)$ per tal d'estudiar en quins casos es verifica que rang $A =$ rang $(A\,|\,B)$. Estudiem per separat els casos $a = 0$ i $a \neq 0$.

(a) *Cas* $a \neq 0$.

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \\ b & b & a & c \end{array}\right) \underset{\substack{f_2' = af_2 - bf_1 \\ f_3' = af_3 - bf_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & b & 1 \\ 0 & a^2 - b^2 & ab - b^2 & a - b \\ 0 & ab - b^2 & a^2 - b^2 & ac - b \end{array}\right) = (*)$$

(a.1) Suposem que $a \neq 0$, $b \neq -a$.

$$(*) \underset{f_3' = (a+b)f_3 - bf_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & b & 1 \\ 0 & a^2 - b^2 & ab - b^2 & a - b \\ 0 & 0 & a(a + 2b)(a - b) & a(ac + bc - 2b) \end{array}\right)$$

- Si $a \neq b$, $a \neq -b$ i $a \neq -2b$, el rang de la matriu del sistema és 3 (i també és 3 el rang de la matriu ampliada). El sistema és, en aquest cas, compatible determinat (té una única solució).
- Si $a = -2b \neq 0$, aleshores la matriu obtinguda és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2b & b & b & 1 \\ 0 & 3b^2 & -3b^2 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 2b^2(2 + c) \end{array}\right)$$

El rang de la matriu del sistema és 2. En canvi, el rang de la matriu ampliada pot ser, o bé 2, o bé 3.
Si $c = -2$, el rang de la matriu ampliada també és 2, i el sistema és compatible indeterminat.
Si $c \neq -2$, el rang de la matriu ampliada és 3 i el sistema és incompatible.

- Si $a = b \neq 0$, la matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b^2(c-1) \end{array}\right) \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} b & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b^2(c-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Com abans, el rang de la matriu del sistema no depèn del valor de la constant c (és sempre igual a 1), mentre que el rang de la matriu ampliada sí que en depèn.
Quan $c = 1$, el rang de la matriu ampliada és igual a 1, i el sistema és compatible indeterminat.
Quan $c \neq 1$, el rang de la matriu ampliada és igual a 2, i el sistema és incompatible.

(a.2) Suposem $b = -a \neq 0$. Llavors, la matriu (1) és:

$$(1) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & -a & 1 \\ 0 & 0 & -2a^2 & 2a \\ 0 & -2a^2 & 0 & a(c+1) \end{array}\right) \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & -a & 1 \\ 0 & -2a^2 & 0 & a(c+1) \\ 0 & 0 & -2a^2 & 2a \end{array}\right)$$

Observem que tant el rang de la matriu del sistema com el rang de la matriu ampliada són iguals a 3. El sistema és, doncs, compatible determinat.

(b) *Cas* $a = 0$. La matriu ampliada del sistema és

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & b & 1 \\ b & 0 & b & 1 \\ b & b & 0 & c \end{array}\right)$$

Fent transformacions elementals de files per esglaonar aquesta matriu,

$$(A \,|\, B) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} b & 0 & b & 1 \\ 0 & b & b & 1 \\ b & b & 0 & c \end{array}\right) \underset{f_3' = f_3 - f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} b & 0 & b & 1 \\ 0 & b & b & 1 \\ 0 & b & -b & c-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{f_3' = f_3 - f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} b & 0 & b & 1 \\ 0 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & -2b & c-2 \end{array}\right)$$

(b.1) Si $b \neq 0$, el rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada són tots dos iguals a 3. El sistema és, doncs, compatible determinat.

(b.2) Si $b = 0$, independentment del valor de la constant $b \in \mathbb{R}$, el rang de la matriu del sistema és 0 i el rang de la matriu ampliada és 1. En aquest cas, el sistema és compatible determinat.

Podem resumir l'estudi realitzat de la forma següent:

$$a=0 \quad \begin{cases} b=0 \longrightarrow \text{sistema incompatible} \\ b\neq 0 \longrightarrow \text{sistema compatible determinat} \end{cases}$$

$$a\neq 0 \quad \begin{cases} b=-a \longrightarrow \text{sistema compatible determinat} \\ b=a \begin{cases} c=1 \longrightarrow \text{sistema compatible indeterminat} \\ c\neq 1 \longrightarrow \text{sistema incompatible} \end{cases} \\ b=-\frac{1}{2}a \begin{cases} c=-2 \longrightarrow \text{sistema compatible indeterminat} \\ c\neq -2 \longrightarrow \text{sistema incompatible} \end{cases} \end{cases}$$

• • •

2. Trobeu les solucions (si en té) del sistema següent, segons els valors de les constants a i b

$$\left.\begin{array}{r} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x+y-z=a \end{array}\right\}$$

Resolució. Fem transformacions elementals de files per tal d'obtenir les formes esglaonades de la matriu A del sistema i la matriu ampliada $(A\,|\,B)$

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=f_2-2f_1 \\ f_3'=f_3-f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-2a & -a+2 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{array}\right)=(*)$$

Si $a=1$,

$$(*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Veiem que rang $A=2=$ rang $(A\,|\,B)$, d'on deduïm que el sistema és compatible indeterminat i té com a conjunt de solucions $x=1,\ y-z=0$.

Suposem ara $a\neq 1$:

$$(*) \underset{\substack{f_2'=\frac{1}{1-a}f_3 \\ f_3'=f_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-2a & -a+2 & 0 \end{array}\right) \underset{f_3'=f_3+(2a-1)f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a+2 & 1-2a \end{array}\right)$$

D'on tenim situacions diferents:

- Si $a\neq 2$, llavors rang $A=3$ i el sistema és compatible determinat amb solució $x=\dfrac{3-a-a^2}{2-a},\ y=-1,\ z=\dfrac{1-2a}{2-a}$.
- Si $a=2$, aleshores rang $A=2\neq$ rang $(A\,|\,B)$. En aquest cas el sistema és incompatible.

Finalment, podem expressar les solucions del sistema d'equacions estudiat, segons els diferents valors de la constant a en la taula següent:

	Conjunt de solucions del sistema
$a \neq 1,\, a \neq 2$	$\{(x,y,z) = (\frac{3-a-a^2}{2-a}, 1, \frac{1-2a}{2-a})\}$
$a = 2$	$\emptyset$
$a = 1$	$\left\{(x,y,z) \middle\vert \begin{smallmatrix} x=1 \\ y-z=0 \end{smallmatrix} \right\}$

• • •

3. Resoleu l'equació matricial següent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolució. Denotem A i B a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i fem transformacions de files a la matriu $(A\,|\,B)$ fins a obtenir una matriu esglaonada on en les r primeres columnes, si r és el rang de la matriu A, obtinguem la matriu identitat d'ordre r. Pot ser que per aconseguir això faci falta efectuar algun intercanvi de columnes, la qual cosa equivaldria a efectuar un canvi en l'ordre de les variables, és a dir, un canvi en les files de la matriu X.

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=f_2-f_1 \\ f_3'=f_3-f_1}}{\overset{}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{f_1'=f_1-f_2-f_3}{\sim} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \vdots \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}}_{T} \left| \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}}_{Z} \right. \right)$$

L'equació $AX = B$ ha estat transformada en l'equació $(I_3\,|\,T)X = Z$. Atès que no hem fet cap intercanvi de columnes, ambdues equacions matricials tenen el mateix conjunt de solucions.

El fet que rang $A = 3 =$ rang $(A\,|\,B)$ ens assegura que l'equació $AX = B$ té solució. Però en ser el rang de la matriu A més petit que el nombre de columnes de la matriu

A, la solució de l'equació $AX = B$ no és única. Anem ara a buscar les solucions de l'equació $(I_3 \,|\, T)X = Z$ (que són les mateixes que les de l'equació $AX = B$).

Atès que la matriu que prové (per transformacions elementals) de la matriu A està descomposta en dues submatrius $(I_3 \,|\, T)$, fem ara la descomposició anàloga en la matriu X, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{pmatrix}$. Analitzem els ordres d'aquestes submatrius.

- Per a que el producte AX tingui sentit s'ha de complir:

  núm. de files de la matriu X = núm. de columnes de la matriu A

- Per a que la igualtat $AX = B$ tingui sentit s'ha de complir:

  núm. de columnes de la matriu X = núm. de columnes de la matriu B

  Així doncs, en aquest cas la matriu X és una matriu de tres files i dues columnes.

- Per a donar sentit al producte $(I_r \,|\, T)\begin{pmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{pmatrix}$ s'ha de complir:

  núm. de files de la matriu $X_1 = r(=\text{rang } A)$
  núm. de files de la matriu $X_2 = n - r$, $n =$ núm. de columnes d'A

En el nostre cas la matriu X_1 és una matriu amb 3 files i 2 columnes; X_2 és una matriu arbitrària (matriu de paràmetres) d'una fila i 2 columnes: $X_2 = (t_1 \ t_2)$.

La matriu X_1 l'obtenim a l'imposar $(I_r \,|\, T)\begin{pmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{pmatrix} = Z$, d'on deduïm

$$X_1 = Z - TX_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(t_1 \ t_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t_1 & -2-t_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment obtenim que les matrius X solució de l'equació $AX = B$ són totes les de la forma:

$$C = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t_1 & -2-t_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

amb $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ paràmetres qualssevol.

Una altra forma de pensar el problema és la següent: observeu que la resolució de l'equació $AX = B$ es pot pensar com la resolució simultània dels dos sistemes d'equacions següents:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 + t_1 &= 1 \\ x_1 + 2y_1 + z_1 + t_1 &= 1 \\ x_1 + y_1 + 2z_1 + t_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 + y_2 + z_2 + t_2 &= 1 \\ x_2 + 2y_2 + z_2 + t_2 &= 2 \\ x_2 + y_2 + 2z_2 + t_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

que, expressats matricialment, s'escriuen de la forma:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1 \quad \text{i} \qquad A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = B_2\,.$$

Fem transformacions de files a les matrius $(A|B_1)$ i $(A|B_2)$ fins a obtenir matrius esglaonades per files on en les primeres r columnes obtinguem la matriu identitat d'ordre r, essent $r = \operatorname{rg} A$ (sabem que $r = 3$)

$$(A\,|\,B_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (A\,|\,B_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Així transformem les equacions $AX = B_1$ i $AX = B_2$ en equacions $(I_3\,|\,T_1)X_1 = Z_1$ i $(I_3\,|\,T_2)X_2 = Z_2$, amb els mateixos conjunts de solucions que $AX = B_1$ i $AX = B_2$, respectivament.

Fàcilment podem deduir ara les solucions (ambdós sistemes són compatibles indeterminats amb un grau de llibertat i les solucions venen expressades en funció de l'última incògnita):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - t_1 \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= 0 \\ t_1 &= t_1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= -2 - t_2 \\ y_2 &= 1 \\ z_2 &= 2 \\ t_2 &= t_2 \end{aligned}\right\}$$

per a $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ qualssevol.

Per tant,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t_1 & -2-t_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

• • •

4. Resoleu les equacions matricials següents:

a) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

b) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

c) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Resolució. Per a resoldre aquest tipus d'equació ($AX = B$) observem que

$$XA = B \iff (XA)^t = B^t \iff A^tX^t = B^t .$$

Resolem $A^tX^t = B^t$, fent transformacions elementals de files i, finalment, transposant X^t, obtenim la solució de l'equació $XA = B$.

a) En aquest cas observem que en fer $A^tX^t = B^t$ obtenim l'equació de l'exercici anterior. Per tant, sabem ja que

$$X^t = \begin{pmatrix} 1-t_1 & -2-t_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, en aquest cas la solució de l'equació és el conjunt de matrius

$$X = \begin{pmatrix} 1-t_1 & 0 & 0 & t_1 \\ -2-t_2 & 1 & 2 & t_2 \end{pmatrix}, \text{ per a } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ qualssevol.}$$

b) Estudiem l'equació $A^tX^t = B^t$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Fem transformacions de files a la matriu $(A^t \,|\, B^t)$ fins a obtenir una matriu esglaonada per files,

$$(A^t \,|\, B^t) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=f_2-f_1 \\ f_3'=f_3-f_1 \\ f_4'=f_4-f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Observem que $\operatorname{rg} A^t = 3$, mentre que $\operatorname{rg}(A^t \,|\, B^t) = 4$ d'on deduïm que el sistema $A^tX^t = B^t$ és incompatible. Per tant, també $XA = B$ és incompatible.

c) Considerem l'equació $A^tX^t = B^t$ i esglaonem la matriu $(A^t \,|\, B^t)$fins a obtenir una matriu amb la matriu identitat I_r en les primeres r columnes, essent $r = \operatorname{rg} A^t$ $(= \operatorname{rg} A)$.

$$\begin{aligned} (A^t \,|\, B^t) &= \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=f_2-f_1 \\ f_3'=f_3-f_1 \\ f_4'=f_4-f_1}}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{f_1'=f_1-f_2-f_3-f_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = (I_4 \,|\, X^t) \end{aligned}$$

En aquest cas l'equació $A^tX^t = B^t$ té una única solució, que és $X^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

El mateix passa amb l'equació $XA = B$, la solució de la qual és $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En aquest cas, atès que la matriu A és invertible, una altra forma de resoldre l'equació $XA = B$ és multiplicar per la dreta ambdós membres de la igualtat per la matriu A^{-1}, obtenint-se així que $X = BA^{-1}$.

Aquells que no conegueu el concepte de matriu invertible o bé, no sapigueu calcular la inversa d'una matriu, podeu mirar la secció següent, dedicada a aquest tòpic.

4.3.2 Problemes proposats

1. Discutiu la compatibilitat dels sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x + y - z &= 5 \\ y &= 4 \end{aligned} \right. \qquad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \right.$$

Solució. Ambdós són incompatibles.

2. Proveu que si els sistemes $AX = B$ i $XA = C$ tenen un solució comuna, aleshores es compleix $BA = AC$.

3. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

a)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ \cdots \quad & \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + nx_n &= 1 \end{aligned} \right\}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= \binom{n+1}{2} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= \binom{n+1}{2} + 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + \cdots + x_n &= \binom{n+1}{2} + 6 \\ \cdots \quad & \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + nx_n &= \binom{n+1}{2} + (n-1)n \end{aligned} \right\}$$

Solució.

a) $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0.$

b) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \cdots,\ x_n = n.$

4. Discutiu i resoleu (en els casos en què existeixi solució) el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \beta x_1 + \beta x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solució. Si $\alpha \neq 1$ i $\beta \neq -1$, el sistema és compatible determinat i la seva solució és

$$x_1 = -1 + \frac{1-2\alpha}{(1+\beta)(1-\alpha)}, \quad x_2 = \frac{-1}{(1+\beta)(1-\alpha)}, \quad x_3 = 1 + \frac{\alpha}{(1+\beta)(1-\alpha)}, \quad x_4 = \frac{1}{1+\beta}.$$

En els altres casos, el sistema és incompatible.

5. Quina relació hi ha d'haver entre les constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ perquè tingui alguna solució no nul·la el sistema d'equacions següent?

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + (1-\alpha)x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 - (1+\beta)x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + (\alpha - 2)x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + \beta x_3 - (3+\beta)x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solució. $5\alpha^2 - \alpha\beta + 5\alpha - \beta = 0.$

6. Determineu per a quins valors de les constants a i b la matriu

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és solució de l'equació

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & b & a & a \\ a & a & b & b \\ b & a & -a & a \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 10 & 11 \\ 11 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució. $a = 1, \quad b = 2.$

4.4 Matrius invertibles. Càlcul de la inversa d'una matriu

Si $A \in M_n(K)$, A és invertible si i només si rang $A = n$. Llavors, la inversa de A, $A^{-1} \in M_n(K)$ és l'única matriu tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
Si A és invertible i $B \in M_n(K)$ verifica $AB = I_n$ o $BA = I_n$ es compleix que $B = A^{-1}$.
El càlcul de la matriu A^{-1} es redueix, doncs, a trobar la solució de l'equació matricial $AX = I_n$ que, a la pràctica, es redueix a efectuar:

$$(A|I_n) \sim \overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{\text{transformacions elementals de files}} \sim (I_n|B)$$

i B serà A^{-1}.

4.4.1 Problemes resolts

1. Calculeu les inverses de les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. Ampliem la matriu A amb la matriu identitat i fem transformacions elementals de files fins arribar a obtenir la matriu identitat a l'esquerra (en el lloc on teníem la matriu A) aconseguint així la inversa de A a la dreta (on abans teníem la matriu identitat).

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_1'=f_3 \\ f_2'=f_1 \\ f_3'=f_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_3'=f_3+f_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_3'=\frac{1}{2}f_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

Així doncs,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fem el mateix amb la matriu B:

$$(B|I_5)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_3'=f_3-f_2 \\ f_5'=f_5-f_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_4'=f_4+f_3 \\ f_5'=f_5+f_4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_3'=-f_3 \\ f_4'=-f_4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_2'=f_2-f_3+f_4 \\ f_3'=f_3-2f_4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f_1'=f_1-f_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_5|B^{-1})$$

i així arribem a que la inversa de la matriu B és:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• • •

2. Calculeu la inversa de la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. Procedim a fer transformacions elementals de files a la matriu $(A|I_5)$

fins a obtenir $(I_5|A^{-1})$

$$(A|I_5) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_1'=f_1-f_2-f_3-f_4-f_5}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=3f_2+f_1 \\ f_3'=3f_3+f_1 \\ f_4'=3f_4+f_1 \\ f_5'=3f_5+f_1}}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{f_1'=-f_1}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (3I_5|B)$$

Observem que si $AB = 3I_5$, llavors $A^{-1} = \frac{1}{3}B$. Així, sense necessitat de fer més càlculs, deduïm que A^{-1} és

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• • •

3. Calculeu les inverses de les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. Fem transformacions elementals de files a la matriu $(A|I_4)$ per a obtenir la inversa de la matriu A.

$$(A|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&2&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&2&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&2&0&0&0&1 \end{array}\right)\underset{\substack{f_i'=f_i-f_1\\ i=2,3,4}}{\underset{\uparrow}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2&1&1&1&1&0&0&0\\ -1&1&0&0&-1&1&0&0\\ -1&0&1&0&-1&0&1&0\\ -1&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right)\underset{f_1'=f_1-f_2-f_3-f_4}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5&0&0&0&4&-1&-1&-1\\ -1&1&0&0&-1&1&0&0\\ -1&0&1&0&-1&0&1&0\\ -1&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right)\underset{\substack{f_i'=5f_i+f_1\\ i=2,3,4}}{\underset{\uparrow}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5&0&0&0&4&-1&-1&-1\\ 0&5&0&0&-1&4&-1&-1\\ 0&0&5&0&-1&-1&4&-1\\ 0&0&0&5&-1&-1&-1&4 \end{array}\right)=(5I_4|C)$$

D'on obtenim

$$A^{-1}=\frac{1}{5}C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4&-1&-1&-1\\ -1&4&-1&-1\\ -1&-1&4&-1\\ -1&-1&-1&4 \end{pmatrix}.$$

Operem ara, de forma semblant, amb la matriu B.

$$(B|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&2&2&1&0&0&0\\ 2&1&2&2&0&1&0&0\\ 2&2&1&2&0&0&1&0\\ 2&2&2&1&0&0&0&1 \end{array}\right)\underset{\substack{f_i'=f_i-f_1\\ i=2,3,4}}{\underset{\uparrow}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&2&2&1&0&0&0\\ 1&-1&0&0&-1&1&0&0\\ 1&0&-1&0&-1&0&1&0\\ 1&0&0&-1&-1&0&0&1 \end{array}\right)\underset{f_1'=f_1+2f_2+2f_3+2f_4}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7&0&0&0&-5&2&2&2\\ 1&-1&0&0&-1&1&0&0\\ 1&0&-1&0&-1&0&1&0\\ 1&0&0&-1&-1&0&0&1 \end{array}\right)\underset{\substack{f_i'=7f_i-f_1\\ i=2,3,4}}{\underset{\uparrow}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7&0&0&0&-5&2&2&2\\ 0&-7&0&0&-2&5&-2&-2\\ 0&0&-7&0&-2&-2&5&-2\\ 0&0&0&-7&-2&-2&-2&5 \end{array}\right)\underset{\substack{f_i'=-f_i\\ i=2,3,4}}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7&0&0&0&-5&2&2&2\\ 0&7&0&0&2&-5&2&2\\ 0&0&7&0&2&2&-5&2\\ 0&0&0&7&2&2&2&-5 \end{array}\right)=(7I_4|D)$$

D'on deduïm que la inversa de la matriu B és:

$$B^{-1}=\frac{1}{7}D=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5&2&2&2\\ 2&-5&2&2\\ 2&2&-5&2\\ 2&2&2&-5 \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Problemes proposats

1. Estudieu si són, o no, invertibles les matrius següents i, en cas de ser-ho, determineu la seva inversa

$$A=\begin{pmatrix} 3&1&1&5\\ -2&4&6&2\\ 0&0&2&1\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ -1&1&1&0\\ -2&1&2&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Solució. Ambdues matrius són invertibles i

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -44/3 & -38 \\ 2 & 3 & -26 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculeu les inverses de les matrius $A_{n,k} \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, $k \neq -1$

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & k & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Solució.

$$A_{n,k}^{-1} = \frac{1}{(k-1)(n+k-1)}\begin{pmatrix} k+n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & k+n-2 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & k+n-2 \end{pmatrix}$$

3. Calculeu les inverses de les matrius $B_{n,k} \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, $k \neq -1$ i $k \neq \dfrac{1}{1-n}$

$$B_{n,k} = \begin{pmatrix} 1 & k & k & \dots & \dots & k \\ k & 1 & k & \dots & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ k & \dots & \dots & \dots & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució.

$$B_{n,k}^{-1} = \frac{1}{(1-k)(kn-k+1)}\begin{pmatrix} kn-2k+1 & -k & -k & \dots & -k \\ -k & kn-2k+1 & -k & \dots & -k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k \\ -k & \dots & \dots & -k & kn-2k+1 \end{pmatrix}$$

4. Calculeu les inverses de les matrius $A_n \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució.

$$A_n^{-1} = \frac{1}{n-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-3 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & n-3 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & \dots & n-3 \end{pmatrix}$$

4.5 Miscel·lània

4.5.1 Problemes resolts

1. Per a quins valors de les constants a, b, c, d, e, f, $\lambda \in \mathbb{R}$ es compleix l'equació següent?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. Per la definició de producte de matrius, i de producte d'una matriu per un escalar, la igualtat de l'enunciat és equivalent a la igualtat entre les matrius

$$\begin{pmatrix} 1+d \\ 2+e \\ 3+f \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Observem que, per a que aquestes matrius puguin ser iguals, cal que $e = -2$ i $1 + d = 3 + f$. Equivalentment, $e = -2$ i $f = d - 2$. Així doncs, els valors de les constants per al quals es compleix la igualtat són: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $e = -2$ i $f = d - 2$.

• • •

2. Estudieu per a quins valors de les constants $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema d'equacions $XA = B$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & a \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

és compatible. En aquests casos, determineu el conjunt de solucions.

Resolució. Estudiarem el sistema equivalent $A^tX^t = B^t$. Comencem estudiant el rang de la matriu $(A^t|B^t)$:

$$(A^t|B^t)=\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & a & 1 & a \\ -1 & 3 & a & 1 & a \\ 1 & 4 & a & 1 & b \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=f_2+f_1 \\ f_3'=f_3-f_1}}{\underset{\uparrow}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & a & 1 & a \\ 0 & 5 & 2a & 2 & 2a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right) \underset{f_3'=5f_3-2f_2}{\underset{\uparrow}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & a & 1 & a \\ 0 & 5 & 2a & 2 & 2a \\ 0 & 0 & -4a & -4 & 5b-9a \end{array}\right).$$

Observem que si $a \neq 0$, llavors rg $A^t =$ rg $(A^t|B^t) = 3$ i el sistema és compatible determinat. En aquest cas ($a \neq 0$) podem seguir fent transformacions elementals de files fins a obtenir la matriu I_3 en les tres primeres columnes:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & a & 1 & a \\ 0 & 5 & 2a & 2 & 2a \\ 0 & 0 & -4a & -4 & 5b-9a \end{array}\right) \underset{\substack{f_2'=2f_2+f_3 \\ f_1'=4f_1+f_3}}{\underset{\uparrow}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rr} 4 & 8 & 0 & 0 & 5b-5a \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 5b-5a \\ 0 & 0 & -4a & -4 & 5b-9a \end{array}\right) \underset{f_2'=\frac{1}{5}f_2}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 4 & 8 & 0 & 0 & 5b-5a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -4a & -4 & 5b-9a \end{array}\right) \underset{f_1'=f_1-4f_2}{\underset{\uparrow}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rr} 4 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -4a & -4 & 5b-9a \end{array}\right) \underset{\substack{f_1'=\frac{1}{4}f_1 \\ f_2'=\frac{1}{2}f_2 \\ f_3'=-\frac{1}{4a}f_3}}{\underset{\uparrow}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}b-\frac{1}{4}a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & -\frac{5b}{4a}+\frac{9}{4} \end{array}\right).$$

Així, en aquest cas la solució és:

$$X^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}b-\frac{1}{4}a \\ 0 & \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a \\ \frac{1}{a} & -\frac{5b}{4a}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

i la solució del sistema inicial és:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{4}b-\frac{1}{4}a & \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a & -\frac{5b}{4a}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Suposem ara que $a = 0$. Llavors tenim:

$$(A^t|B^t) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5b \end{array}\right)$$

i observem que rg $A^t = 2$, mentre que rg $(A^t|B^t) = 3$ (independentment del valor de $b \in \mathbb{R}$). En aquest cas, doncs, els sistema és incompatible.

• • •

3. Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu invertible. Proveu que la matriu $T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} S^{-1} & S^{-1} \\ S^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix}$ és la inversa de la matriu $X = \begin{pmatrix} S & S \\ S & -S \end{pmatrix}$.

Resolució. De les definicions de les operacions bàsiques amb matrius, es dedueix que podem fer també aquestes operacions bàsiques "per blocs". Llavors:

$$XT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S & S \\ S & -S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{-1} & S^{-1} \\ S^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} SS^{-1}+SS^{-1} & SS^{-1}-SS^{-1} \\ SS^{-1}-SS^{-1} & SS^{-1}+SS^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} = I$$

$$TX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S^{-1} & S^{-1} \\ S^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & S \\ S & -S \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S^{-1}S+S^{-1}S & S^{-1}S-S^{-1}S \\ S^{-1}S-S^{-1}S & S^{-1}S+S^{-1}S \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} = I$$

Per tant, $T = X^{-1}$.

• • •

4. Determineu el conjunt de solucions de l'equació $AX - XA = 0$, essent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolució. Observem en primer lloc que, per a que aquesta equació matricial tingui sentit, cal que $X \in M_5(\mathbb{R})$. Posem

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \end{pmatrix}$$

a la matriu incògnita. Llavors:

$$AX\text{–}XA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1+x_5^1 & 0 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2+x_5^2 & 0 \\ 0 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3+x_5^3 & 0 \\ 0 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4+x_5^4 & 0 \\ 0 & x_1^5 & x_2^5 & x_3^5+x_5^5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2-x_1^1 & x_3^2-x_2^1 & x_4^2-x_3^1-x_5^1 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3-x_1^2 & x_3^3-x_2^2 & x_4^3-x_3^2-x_5^2 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4-x_1^3 & x_3^4-x_2^3 & x_4^4-x_3^3-x_5^3 & x_5^4 \\ 0 & -x_1^4 & -x_2^4 & -x_3^4-x_5^4 & 0 \\ x_1^4 & x_2^4-x_1^5 & x_3^4-x_2^5 & x_4^4-x_3^5-x_5^5 & x_5^4 \end{pmatrix}.$$

D'aquí deduïm que cal:

$$\begin{aligned}
&x_1^2 = x_1^3 = x_1^4 = 0\\
&x_2^4 = 0\\
&x_5^2 = x_5^3 = x_5^4 = 0\\
&x_1^1 = x_2^2 = x_3^3 = x_4^4\\
&x_2^3 = x_1^5 = 0\\
&x_3^4 = x_2^5 = 0\\
&x_4^3 = x_3^2 = x_2^1\\
&x_5^1 = x_4^2 - x_3^1\\
&x_5^5 = x_1^1 - x_3^5
\end{aligned}$$

Així doncs, les matrius X que satisfan l'equació són de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_4^2 - x_3^1 \\ 0 & x_1^1 & x_2^1 & x_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^1 & x_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^5 & x_4^5 & x_1^1 - x_3^5 \end{pmatrix}$$

amb $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_4^2, x_3^5, x_4^5 \in \mathbb{R}$ qualssevol.

• • •

5. Estudieu el conjunt de solucions del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \beta y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + \beta y + z = 0 \\ x + \alpha\beta y + z = 0 \end{array} \right.$$

segons els diferents valors de les constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolució. Observem, en primer lloc, que es tracta d'un sistema lineal d'equacions homogeni i que, per tant, és compatible (una solució és $x = y = z = 0$). Es tracta, doncs, d'estudiar si hi ha d'altres solucions no trivials. En primer lloc, escrivim el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anomenem A a la matriu del sistema. Si $\operatorname{rg} A = 3$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial ($x = y = z = 0$). Si $\operatorname{rg} A \leq 2$, el sistema serà compatible indeterminat i tindrà infinites solucions.

Fem transformacions elementals de files a la matriu A per a determinar el seu rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2' = f_2 - \alpha f_1 \\ f_3' = f_3 - f_1}}{\underset{\uparrow}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \beta - \alpha\beta & 1 - \alpha^2 \\ 0 & \alpha\beta - \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix} \underset{f_3' = f_3 + f_2}{\underset{\uparrow}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \beta - \alpha\beta & 1 - \alpha^2 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Veiem que si $\beta - \alpha\beta \neq 0$ i $2 - \alpha - \alpha^2 \neq 0$, el rang de la matriu A és igual a 3, i només si estem en aquesta situació.

Podem encara concretar una mica més:

$$\begin{aligned} 2 - \alpha - \alpha^2 &= -(\alpha - 1)(\alpha + 2) \\ \beta - \alpha\beta &= \beta(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Així, rg $A = 3$ si, i només si: $\alpha \neq 1, -2$ i $\beta \neq 0$. Llavors, el sistema té una única solució: $x = y = z = 0$. En tots els altres casos, $\alpha = 1$ o -2 o bé $\beta = 0$, el sistema té infinites solucions.

4.5.2 Problemes proposats

1. Calculeu el rang de les matrius següents, reduint-les a matrius esglaonades per files

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució. rg $A = 3$ i rg $B = 3$.

2. Determineu el conjunt de solucions reals dels sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= \ \ 1 \end{aligned} \right. \qquad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \right.$$

Solució. (a) Es tracta d'un sistema compatible indeterminat. El conjunt de solucions és: $x = 0$, $x_2 = 1 + \lambda$, $x_3 = \lambda$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Es tracta d'un sistema compatible determinat. La solució és: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

3. Estudieu si els sistemes d'equacions

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= \ \ 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= \ \ 2 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

tenen alguna solució comuna, determinant prèviament el conjunt de solucions d'ambdós sistemes.

Solució. El conjunt de solucions del primer sistema és

$$\left\{ \left(\frac{11}{14}(\lambda - 1), \frac{3}{7}(\lambda - 1), \lambda \right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

i el del segon sistema és $\left\{ \left(\frac{2}{3} - \mu, \frac{1}{3} + \mu, \mu \right) \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. No tenen cap solució comuna.

4. Estudieu, segons els diferents valors de $c \in \mathbb{R}$, el rang de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1-c & -c & -c \\ c & 1+c & -1+c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució. rg $M = 3$, per a tot $c \in \mathbb{R}$.

5. Determineu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

6. Determineu les matrius X, Y, Z que satisfan el sistema següent d'equacions matricials

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Y - Z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z = 0 \end{array} \right.$$

Solució.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

amb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ qualssevol.

7. Generalitzeu l'exercici anterior, determinant les matrius X, Y, Z que satisfan el sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & {}^{n)} & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & {}^{n)} & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Y - Z \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{n-1}{\smile}\!\!\dots & 0 \end{pmatrix} X = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{n-1}{\smile}\!\!\dots & 0 \end{pmatrix} Z = 0 \end{array} \right.$$

Solució.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \mathbf{0} \\ x_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ x_{n-2} & \dots & x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

amb $x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ qualssevol.

Capítol 5

Determinants

5.1 Introducció

Takakazu Seki (1640?-1708) al Japó va anticipar alguns elements de la teoria de determinants. Les primeres referències a Europa són d'autors d'aproximadament la mateixa època: Colin Maclaurin (1698-1746) i Gabriel Cramer (1704-1752).

Abans, però, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) havia trobat, entre 1678 i 1713, resultats importants en la teoria de sistemes d'equacions lineals no homogenis, arribant a un resultat equivalent al que avui es coneix amb el nom de "regla de Cramer". Aquest darrer, l'any 1750, la va publicar. Els estudis recents d'historiadors com Eberhard Knoblock apunten a que Leibniz va ser qui va sentar les bases de la teoria dels determinants a Europa, tot i que tradicionalment s'han atribuït a altres matemàtics, com als anteriorment citats i, entre d'altres, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) i Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

La paraula *determinant* va ser introduïda per primer cop per Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) l'any 1801 . En el seu sentit actual la utilitza Augustin Louis Cauchy (1789-1857). A partir de la segona meitat del segle XIX apareix un gran nombre de publicacions sobre determinants. A Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) es deu l'ús modern de la paraula determinant. A James Joseph Sylvester (1814-1897) i a Arthur Cayley (1821-1895) es deuen diversos treballs sobre determinants. El primer va introduir un mètode per eliminar una incògnita entre dues equacions polinòmiques utilitzant un determinant, tot i que això ja es troba en els treballs de Leibniz, i el segon va introduir la notació moderna dels determinants, amb les barres verticals.

A principis del segle XX es van publicar de forma pòstuma unes conferències de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) i de Leopold Kronecker (1823-1891), en les quals s'assentava la teoria moderna dels determinants, definits com a "formes bilineals alternades".

5.2 Determinant d'una matriu. Propietats

Existeixen diverses formes de definir un determinant. Una d'elles és mitjançant el concepte de permutació. Recordeu que una *permutació* d'$A=\{1,2,\dots,n\}$ és tota aplicació bijectiva

$$\begin{array}{rcll} s:A & \longrightarrow & A & \\ i & \longmapsto & s(i) & 1\le i\le n \end{array}$$

El nombre de permutacions d'A, si el cardinal d'A és n, és $n!$ Posem $S_n=\{s:A\longrightarrow A\mid \ s \text{ és bijectiva}\}$.
Si notem $s(i)=s_i$, llavors una permutació $s\in S_n$ es pot indicar mitjançant

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\end{pmatrix}$$

Donada una permutació s, com la indicada, direm que s_i i s_j presenten inversió si $i<j$ i $s_i>s_j$. El *nombre d'inversions* d'una permutació s el notarem $I(s)$. Així, per exemple, la permutació

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

és tal que $I(t)=3$, mentre que la permutació

$$t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

és tal que $I(t)=1$.
El *signe d'una permutació* es defineix com a

$$\varepsilon(s)=(-1)^{I(s)}$$

és a dir, $\varepsilon(s)=+1$ si $I(s)$ és parell i $\varepsilon(s)=-1$ si $I(s)$ és senar.
Si $A\in M_n(K)$ és una matriu quadrada amb coeficients en un cos commutatiu K (nosaltres generalment treballarem a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$), definim el determinant d'A mitjançant

$$\det A=\sum_{s\in S_n}\varepsilon(s)a_1^{s_1}a_2^{s_2}\dots a_n^{s_n}\,.$$

És a dir, el determinant d'A és la suma de $n!$ sumands on cada sumand és el producte de n elements de la matriu, pertanyents a files i columnes distintes, afectat -aquest producte- del signe $+$ o $-$ segons que el nombre d'inversions de la permutació d'A considerada sigui parell o senar. Podem considerar l'aplicació que a cada matriu li assigna el seu determinant

$$\begin{array}{rcl} \det: M_n(K) & \longrightarrow & K\\ A & \longmapsto & \det A\end{array}$$

La notació habitual per al determinant d'una matriu A és $|A|$.
De la definició s'obté que

$$
\begin{aligned}
|a_1^1| &= a_1^1 \\
\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} &= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \\
\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} &= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3
\end{aligned}
$$

Algunes de les propietats del determinant d'una matriu són:

1. El determinant de la matriu unitat és 1

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

2. Per a una matriu triangular superior es té

$$
\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \cdot a_2^2 \dots a_n^n
$$

En particular, el determinant d'una matriu diagonal és el producte dels elements que estan sobre la diagonal. En el cas d'una matriu triangular inferior, es té també el resultat anàleg.

3. Si existeix una columna (o fila) de zeros el determinant és nul.

4. Si existeixen dues columnes (o files) iguals el determinant és nul.

5. Si permutem entre elles dues columnes (o files) el determinant canvia de signe.

6. Si a una columna (o fila) se li suma una combinació lineal de la resta de columnes (o files) el determinant no varia.

7. Si multipliquem per un escalar λ una colmna (o fila) d'una matriu, el determinant de la nova matriu també queda multiplicat per λ, és a dir:

$$
\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & \lambda a_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & \lambda a_i^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_i^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_1^i & \dots & \lambda a_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i & \dots & \lambda a_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Com a conseqüència, si $A \in M_n(K)$ i $\lambda \in K$, es té que

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

8. Es compleix

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 + b_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_i^n + b_i^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_i^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & b_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & b_i^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i + b_1^i & \dots & a_n^i + b_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^i & \dots & b_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

9. Si $A, B \in M_n(K)$ es compleix que

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

10. Si $A \in M_n(K)$ és invertible es compleix que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

11. Si A^t és la matriu transposada de la matriu A (és a dir, la matriu obtinguda a partir de la matriu A en intercanviar files per columnes) es compleix que $\det A = \det A^t$.

Si $A \in M_n(K)$, la notació A_j^i indica la matriu obtinguda de A en suprimir la fila i-èsima i la columna j-èsima (noteu que $A_j^i \in M_{n-1}(K)$). Definim com a *adjunt de l'element* a_j^i de A, a

$$\alpha_j^i = (-1)^{i+j} \det A_j^i \,.$$

El $\det A_j^i$ s'anomena *menor complementari de l'element* a_j^i de A. El determinant d'A es pot calcular mitjançant el desenvolupament per una columna j qualsevol, $1 \le j \le n$,

$$\det A = a_j^1 \alpha_j^1 + \cdots + a_j^n \alpha_j^n$$

o bé, per una fila i qualsevol, $1 \le i \le n$,

$$\det A = a_1^i \alpha_1^i + \cdots + a_n^i \alpha_n^i \,.$$

Si $A \in M_n(K)$ anomenem $\mu\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_p \end{smallmatrix}$ al *menor d'ordre* p de A que és el determinant de la matriu que resulta de considerar els elements que pertanyen a les p files $i_1, \dots, i_p$ i a les p columnes $j_1, \dots, j_p$. Així, per exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

és

$$\mu^{1\,2}_{1\,2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \; ; \quad \mu^{2\,3\,4}_{2\,3\,4} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \; ; \quad \mu^{1\,3\,4}_{2\,3\,4} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} .$$

Si suprimim p files, $i_1, \dots, i_p$, i p columnes, $j_1, \dots, j_p$, de la matriu $A \in M_n(K)$, el determinant de la matriu així obtinguda (d'ordre $n-p$) s'anomena *menor complementari* del menor $\mu^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$ i es nota $\tilde{\mu}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$.
En l'exemple anterior, tenim

$$\tilde{\mu}^{1\,2}_{1\,2} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \; ; \quad \tilde{\mu}^{2\,3\,4}_{2\,3\,4} = |2| \; ; \quad \tilde{\mu}^{1\,3\,4}_{2\,3\,4} = |-1| \; .$$

S'anomena adjunt d'un menor (d'ordre p) $\mu^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$ a:

$$\alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = (-1)^{i+j} \tilde{\mu}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} ,$$

on $i = i_1 + \cdots + i_p$, $j = j_1 + \cdots + j_p$; convenim que sempre $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$; $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$.
Amb aquestes notacions, el determinant d'A es pot calcular de forma més general amb la regla de Laplace que permet el desenvolupament del determinant pels menors d'ordre p de p columnes $j_1, \dots, j_p$, mitjançant

$$\det A = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mu^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \cdot \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$$

o bé, pels menors d'ordre p de p files $i_1, \dots, i_p$, mitjançant

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \mu^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \cdot \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} .$$

Com a conseqüència de la regla de Laplace es té que:

a) Si A, B són matrius quadrades d'ordres n i m respectivament, llavors

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B$$

on 0 indica una "submatriu", els coeficients de la qual són tots nuls.

b) En general, si A_i és una matriu quadrada, $\forall\, i,\ 1 \le i \le p$, és:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_2 & \dots & \dots & B_p \\ 0 & A_2 & C_3 & \dots & C_p \\ 0 & 0 & A_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & A_p \end{pmatrix} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

per a tot $B_2, \dots, B_p, C_3, \dots, C_p, \dots$.

5.2.1 Problemes resolts

1. Calculeu el determinant de la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Desenvolupant per la primera fila.

b) Desenvolupant per la primera columna.

c) Fent prèviament transformacions per introduir zeros.

Resolució.

a) Desenvolupant per la primera fila tenim:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculem els tres determinants d'ordre tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desenvolupant per la segona fila}}}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desenvolupant per la primera columna}}}{=} -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desenvolupant per la primera columna}}}{=} -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Finalment, $\det A = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = -7$.

b) Com que en la primera columna de la matriu A apareixen dos zeros,

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 9 = -7$$

c) Sigui B la matriu obtinguda a partir de A, sumant-li a la tercera fila la primera:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atès que sumar a una fila una combinació lineal de les altres no varia el determinant, tenim que:

$$\det A \;=\; \det B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desenvolupant per la primera columna}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)$$

Operant de forma anàloga, concretament restant dos cops la primera fila a la segona i un cop a la tercera, obtenim:

$$(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\,.$$

• • •

2. Calculeu el determinant següent

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$$

Resolució. Restem la primera fila a la segona, la segona fila a la tercera, etc., la qual cosa no varia el determinant i d'aquesta forma aconseguim que tots els elements de la primera columna, tret del primer, siguin zeros, i llavors desenvolupem per la primera columna:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 4 & 18 & 48 & 100 \\ 0 & 8 & 54 & 192 & 500 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 4 & 18 & 48 & 100 \\ 8 & 54 & 192 & 500 \end{vmatrix} = (1)\,.$$

Observem que tots els coeficients de la segona columna són múltiples de 2, els de la tercera són múltiples de 3 i els de la quarta de 4. Treiem fora aquests números,

$$(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = (2)\,.$$

Restem ara a cadascuna de les columnes l'anterior aconseguint, així, zeros a la primera fila, tret de l'element que és a la primera columna, i desenvolupem per la primera fila:

$$(2) = 24 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 19 & 37 & 61 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \\ 19 & 37 & 61 \end{vmatrix} = (3)\,.$$

Repetim la mateixa operació:

$$(3) = 24 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 19 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 18 & 24 \end{vmatrix} = 24 \cdot 12 = 288\,.$$

• • •

3. Calculeu, per a tot $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & \dots & n \\ n & 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & n & 1 & \dots & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & \dots & n & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Resolució. Calculem els determinants A_n, per als primers valors de $n \in \mathbb{N}$.

$A_1 = |1| = 1$

$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2'=c_2-c_1 \\ c_3'=c_3-c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{f_1'=f_1+f_2+f_3}{=} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 7(-2)^2$

$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2'=c_2-c_1 \\ c_3'=c_3-c_1 \\ c_4'=c_4-c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_1'=f_1+f_2+f_3+f_4}{=} \begin{vmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 13(-3)^3$

Per a $n > 4$ podem procedir anàlogament.

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & \dots & n \\ n & 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & n & 1 & \dots & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & \dots & n & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{c'_2 = c_2 - c_1 \\ c'_3 = c_3 - c_1 \\ \vdots \\ c'_n = c_n - c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & n_1 & \dots & \dots & n-1 \\ n & 1-n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 1-n & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\underset{f'_1 = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}{=} \begin{vmatrix} 1+(n-1)n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 1-n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 1-n & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1-n \end{vmatrix} = [1+(n-1)n](1-n)^{n-1}$$

• • •

4. Per a tot $n \geq 2$, definim

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n+1 & & & \\ n-1 & n & n+1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & n & n+1 \\ & & & n-1 & n \end{vmatrix}$$

Determineu el valor de D_n en funció dels valors de D_i, $i < n$.

Resolució.

$$D_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desenvolupant per} \\ \text{la 1a columna}}}{=} n \begin{vmatrix} n & n+1 & & & \\ n-1 & n & n+1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & n & n+1 \\ & & & n-1 & n \end{vmatrix} - (n-1) \begin{vmatrix} n+1 & & & & \\ n-1 & n & n+1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & n & n+1 \\ & & & n-1 & n \end{vmatrix} =$$

$$= nD_{n-1} - (n-1)(n+1) \begin{vmatrix} n & n+1 & & & \\ n-1 & n & n+1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & n & n+1 \\ & & & n-1 & n \end{vmatrix} = nD_{n-1} - (n-1)(n+1)D_{n-2}.$$

• • •

5. Calculeu el determinant de la matriu $A_n = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per: $a_{ij} = i + j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Resolució. Observem que A_n és la matriu simètrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & n+2 & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \end{pmatrix}$$

Si $n=1$, $|A_1| = |2| = 2$. Si $n=2$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$. Per a $n \geq 3$,

$$|A_n| \underset{\substack{c_2' = c_2 - c_1 \\ c_3' = c_3 - c_2 \\ \vdots \\ c_n' = c_n - c_{n-1}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5.2.2 Problemes proposats

1. Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & z & x & b \\ z & a & b & x \\ x & b & a & z \\ b & x & z & a \end{vmatrix} = [(x-b)^2 - (z-a)^2] \cdot [(x+b)^2 - (z+a)^2] \,.$$

2. Calculeu, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & n & \dots & n \\ n & n & 3 & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & \dots & n \end{vmatrix} .$$

Solució. $D_n = (-1)^{n-1} \cdot n!$.

3. Calculeu la relació entre els determinants de les següents parelles de matrius quadrades:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A, \quad B = -A$ per a qualsevol $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Solució.

a) $\det A = \dfrac{3}{2} \det B$.

b) $\det B = (-1)^n \det A$.

4. a) Calculeu

$$B_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+a \end{vmatrix}, \qquad C_4 = \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+a \end{vmatrix}.$$

b) Generalitzeu el resultat anterior a matrius d'ordre n.

Solució.

a) $B_4 = (1+a)^3$, $C_4 = (5+a)(1+a)^3$.

b) $B_n = (1+a)^{n-1}$, $C_n = (a+n+1)(1+a)^{n-1}$.

5. Calculeu el valor dels determinants següents:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & n+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \end{vmatrix}. \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2-n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2-n \end{vmatrix}.$$

Solució. a) $(n-1)!$ b) $(-1)^{n-1}2n^{n-1}$.

5.3 Càlcul del rang i la inversa d'una matriu mitjançant determinants

El rang d'una matriu coincideix amb l'ordre del major menor no nul. És a dir, si $A \in M_n(K)$, rang $A = r$ si, i només si, existeix un menor d'ordre r no nul i tots els menors d'ordre superior a r són nuls.

Donada una matriu $A \in M_n(K)$ s'anomena *matriu d'adjunts* de la matriu A aquella que resulta de substituir cada element a^i_j de A pel seu adjunt α^i_j.

Donada una matriu $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$ podem saber si admet inversa mitjançant el càlcul del seu determinant, ja que A és invertible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$. En el cas que $\det A \neq 0$, podem trobar la matriu inversa de la matriu A, A^{-1}, mitjançant

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

on α_j^i és l'adjunt de l'element a_j^i de la matriu. Noteu que la matriu (α_j^i) indicada és la matriu d'adjunts de la matriu transposada de la matriu A.

5.3.1 Problemes resolts

1. Calculeu, mitjançant determinants, el rang de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. Una possible forma de fer-ho, consisteix a començar per estudiar el determinant de la matriu A. Si aquest determinant és diferent de zero, aleshores el rang d'A és cinc. En aquest cas, però, $\det A = 0$ i per tant rang $A \leq 4$. Llavors, hauríem d'estudiar tots els menors d'ordre quatre (n'hi ha $5^2 = 25$). Si algun d'ells és no nul, aleshores ja podem assegurar que el rang d'A és quatre. En cas contrari, o sigui, si tots els determinants d'ordre quatre són nuls, passaríem a estudiar els d'ordre tres. D'ordre tres n'hi ha $10^2 = 100$ i així successivament. Com veiem, d'aquesta forma és possible que s'hagin d'estudiar molts determinants.

Observem què passa si fem el procés a l'inrevés. En el cas que hi hagi algun menor d'ordre dos no nul, aquest és fàcil de trobar. Suposant això, agafem D_2 un menor d'ordre dos no nul. Aleshores no hem d'estudiar tots els menors d'ordre tres, sinó només aquells que n'obtenim afegint una fila i columna a D_2. D'aquests n'hi ha $6^2 = 36$ (compareu amb els 100 d'abans!). Si tots aquests determinants són nuls concloem que el rang d'A és dos. Si d'aquests n'hi ha algun no nul, diguem-li $D_3 \neq 0$, aleshores hauríem d'estudiar els menors d'ordre quatre que s'obtenen a l'ampliar D_3 amb una fila i una columna. D'aquests menors n'hi ha $2^2 = 4$ (enfront dels 25 d'abans).

Veiem que amb qualsevol dels dos mètodes, en el pitjor dels casos, hauríem de calcular molts determinants. Per això l'estudi del rang d'una matriu mitjançant determinants, si bé pot ser molt útil en el cas de "matrius petites", no acostuma a ser rentable en cas de matrius d'ordre gran. No obstant això, tot recordant el nombre de menors, ens adonem que el segon mètode és millor que el primer.

Anem, doncs, a calcular el ragn d'A. Comencem escollint un menor d'ordre dos no nul. Per exemple,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Ampliem una fila i una columna

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Hem tingut sort! En cas que aquest determinant hagués estat nul, hauríem hagut de calcular

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{o bé} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.,}$$

fins a trobar-ne un de no nul.

Ampliem D_3 amb una fila i una columna

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{c_1'=c_1+c_4}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_2'=f_2+f_3}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1=f_2}{\underset{\uparrow}{=}} 0\,.$$

Bé, en aquest cas no hem tingut tanta sort. Haurem de continuar estudiant els altres menors d'ordre quatre, però ho fem amb la tranquil·litat de saber que només hi ha tres altres possibles menors d'ordre quatre que s'obtenen ampliant D_3

$$D_4' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_2'=c_2-c_1}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_3=c_2}{\underset{\uparrow}{=}} 0$$

$$D_4'' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Ja hem trobat un menor d'ordre quatre no nul; i com que al principi ja hem fet esment que $\det A = 0$, tenim finalment que el rang de la matriu A és quatre.

• • •

2. Calculeu la inversa de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolució. En primer lloc, per saber si la matriu A és o no invertible, calculem el seu determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_1' = f_1 - 2f_4 \\ f_2' = f_2 - 3f_4 \\ f_3' = f_3 - 4f_4}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_1' = f_1 - f_3 \\ f_2' = f_2 - f_3}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Així doncs, atès que $|A| \neq 0$, A és una matriu invertible.

Calculem ara la matriu adjunta d'A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -11 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -20 & 15 & -5 & 15 \\ 10 & -2 & 2 & -32 \end{pmatrix}.$$

Concloem finalment que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A^t) = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 10 & -11 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -20 & 15 & -5 & 15 \\ 10 & -2 & 2 & -32 \end{pmatrix}.$$

• • •

3. Calculeu, mitjançant determinants, les inverses de les matrius següents

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolució.

a) Calculem el determinant d'A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\,,$$

i, en aquest cas la matriu adjunta de A^t es calcula de seguida

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'on

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A^t) = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) Calculem del determinant de B

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\,.$$

En aquest cas ens costa una mica més, però no gaire, calcular la matriu adjunta de B^t

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) En aquest cas, com sempre que treballem amb determinants i matrius una mica grans, les coses es compliquen una mica.

Comencem, com sempre, calculant el determinant de la nova matriu

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,.$$

Fins aquí cap problema. Calculem ara la matriu adjunta de C^t

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(C^t) = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} & -A_{14} & A_{15} & -A_{16} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} & A_{24} & -A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} & -A_{34} & A_{35} & -A_{36} \\ -A_{41} & A_{42} & -A_{43} & A_{44} & -A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & -A_{52} & A_{53} & -A_{54} & A_{55} & -A_{56} \\ -A_{61} & A_{62} & -A_{63} & A_{64} & -A_{65} & A_{66} \end{pmatrix}$$

Calculem ara

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De forma anàloga a A_{12}, els determinants A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16} són nuls, atès que tenen la primera columna nul·la.

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_{21} = 2$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ c_1=c_2}}{=} 0$$

De forma anàloga $A_{24} = A_{25} = A_{26} = 0$ perquè tenen també les dues primeres columnes iguals.

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ f_1=f_2}}{=} 0 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1 \qquad A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{35} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1$$

$$A_{36} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1.$$

$$A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$A_{45} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1$$

$$A_{46} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1.$$

$A_{51} = A_{61} = 0$ (tenen les dues primeres files iguals)

$A_{52} = A_{62} = 0$ (tenen la segona fila nul·la)

$A_{53} = A_{63} = 0$ (tenen la tercera i quarta fila iguals)

$A_{54} = A_{64} = 0$ (tenen la quarta fila nul·la)

$$A_{55} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{56} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = A_{55} = 2$$

$A_{65} = 0$ (té l'última columna nul·la) $$A_{66} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2$$

I ara sí, finalment:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} Adj(C^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si més no, esperem que aquest exercici serveixi per convèncer al lector que aquest és un mètode llarg i pesat pel càlcul de la inversa de matrius que no siguin "molt petites". Si no fos així, animem al lector a fer servir aquest mètode per a una matriu quadrada d'ordre no gaire gran, per exemple nou i sense cap zero.

• • •

4. Digueu per a quins valors de les constants $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, el rang de la matriu següent és igual a 2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 2 & c \\ 1 & 1 & 3 & d \end{pmatrix}$$

Resolució. El rang de M serà igual a 2 si, i només si, existeix algun menor d'ordre 2 no nul i tots els menors d'ordre més gran que 2 són nuls. Així doncs, hauran de ser nuls $\det M$ i tots els menors de M d'ordre 3.

Observem, en primer lloc, que sempre es compleix $2 \leq \text{rang}\, M \leq 3$. En efecte, existeix un menor de M d'ordre 2 no nul, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, i

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 2 & c \\ 1 & 1 & 3 & d \end{vmatrix} \underset{c_3' = c_3 - 2c_2 - c_1}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} = 0\,.$$

Anem a veure ara que els menors d'ordre 3 s'anul·len.

Com ja s'ha dit al problema 1, no és necessari estudiar tots els menors d'ordre 3 de la matriu M, sinó que n'hi ha prou amb calcular els menors d'ordre 3 que s'obtenen afegint una fila i una columna al menor d'ordre 2 no nul trobat abans. Calculem aquests menors

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \end{vmatrix} = -2a - 2b$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 2c + 2b - 2d$$

Concloem doncs, que el rang de la matriu M és 2 si, i només si, $b = -a$ i $d = c - a$ amb $a, c \in \mathbb{R}$ qualssevol.

5.3.2 Problemes proposats

1. Estudieu, segons els diferents valors dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el rang de les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Solució.

- rang $A = 3$ si $\beta \neq 6$. Altrament, rang $A = 2$.

- rang $B = 3$ si $\alpha \neq 1, -2$ i $\beta \neq 0$. Si $\alpha \neq 1$, rang $B = 2$, per a tot β. Si $\alpha = 1$, rang $B = 1$, per a tot β.

- rang $C = 5$ si $\alpha \neq 1, -4$. Si $\alpha = 1$, rang $C = 1$. Si $\alpha = -4$, rang $C = 4$.

2. Deduïu de l'exercici anterior, en quins casos les matrius A, B i C són invertibles, i calculeu les seves inverses en aquests casos.

Solució.

- A és invertible si, i només si, $\beta \neq 6$.

- B és invertible si, i només si, $\alpha \neq 1, -2$ i $\beta \neq 0$.

- C és invertible si, i només si, $\alpha \neq 1, -4$.

- Si $\beta \neq 6$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\beta - 6} \begin{pmatrix} 6 - \frac{1}{2}\beta & -1 & -1 \\ -\frac{5}{4}\beta & \frac{1}{2}(\beta - 1) & \frac{5}{2} \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Si $\alpha \neq 1, -2$ i $\beta \neq 0$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & \frac{1+\alpha}{\alpha^2+\alpha-2} & -\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2} \\ -\frac{1}{(\alpha^2+\alpha-2)\beta} & -\frac{1}{(\alpha^2+\alpha-2)\beta} & \frac{1+\alpha}{(\alpha^2+\alpha-2)\beta} \\ \frac{1+\alpha}{\alpha^2+\alpha-2} & -\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2} \end{pmatrix}$.

- Si $\alpha \neq 1, -4$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+3}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} \\ -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & \frac{\alpha+3}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} \\ -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & \frac{\alpha+3}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} \\ -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & \frac{\alpha+3}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} \\ -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & -\frac{1}{\alpha^2+3\alpha-4} & \frac{\alpha+3}{\alpha^2+3\alpha-4} \end{pmatrix}$.

3. Per a quins valors de les constants $a, b \in \mathbb{R}$ el rang de la matriu següent és màxim?

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-b & a & a & \dots & a \\ a & 3a-b & a & \dots & a \\ a & a & 3a-b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & 3a-b \end{pmatrix}$$

Solució. rang $M(a,b) = n$ sempre que $2a - b \neq 0$i $b - (n+2)a \neq 0$.

5.4 Resolució de sistemes d'equacions lineals. Regla de Cramer

Considereu el sistema de n equacions i n incògnites

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = y^1 \\ \dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_n^n x^n = y^n \end{array} \right.$$

que es pot escriure en forma d'equació matricial

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

o bé AX=Y, essent

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Quan $\det A \neq 0$, el sistema és compatible determinat i es pot trobar la solució mitjançant la regla de Cramer que diu:

$$x^i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, Y, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A} \quad \forall\, i, \quad 1 \leq i \leq n$$

on $\det(a_1,\dots,a_{i-1},y,a_{i+1},\dots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & y^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & y^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$.

En el cas general, suposem que tenim un sistema de m equacions lineals amb n incògnites

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\cdots+a_n^1x^n=y^1 \\ \dots \\ a_1^mx^1+a_2^mx^2+\cdots+a_n^mx^n=y^m \end{array}\right. \tag{5.1}$$

compatible, és a dir, rang $A=$ rang $(A|Y)=r$, $r\leq n$. Llavors existeix un menor d'A d'ordre r, no nul. Podem suposar, reordenant si cal, que aquest menor és $\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{vmatrix}$.

Aleshores el sistema (5.1) és equivalent al sistema següent:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1x^1+\cdots+a_n^1x^n=y^1 \\ \dots \\ a_1^rx^1+\cdots+a_n^rx^n=y^r \end{array}\right.$$

Llavors, podem escriure el sistema en la forma

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1x^1+\cdots+a_r^1x^r=y^1-a_{r+1}^1x^{r+1}-\cdots-a_n^1x^n \\ \dots \\ a_1^rx^1+\cdots+a_r^rx^r=y^r-a_{r+1}^rx^{r+1}-\cdots-a_n^rx^n \end{array}\right.$$

Per a cada conjunt de valors arbitraris $x_1^{r+1},\dots,x^n$ és un sistema de r equacions amb r incògnites i, com que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{pmatrix}=r \quad\Longleftrightarrow\quad \det\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{pmatrix}\neq 0$$

podem aplicar la regla de Cramer.

L'expressió de la solució general del sistema en funció de $n-r$ paràmetres: $x^{r+1},\dots,x^n$ és:

$$x^i=M_y^i-M_{r+1}^ix^{r+1}-\cdots-M_n^ix^n\,,\quad i=1,\dots,r$$

essent

$$M_y^i=\frac{1}{\det M}\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & y^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & y^r & \dots & a_r^r \end{vmatrix} \qquad M_j^i=\frac{1}{\det M}\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_j^r & \dots & a_r^r \end{vmatrix},\ j=r+1,\dots,n$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow \qquad\qquad & \qquad\qquad \uparrow \\ \text{columna } i\text{-èsima} \qquad\qquad & \qquad\qquad \text{columna } i\text{-èsima} \end{array}$$

$$M=\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{pmatrix}$$

5.4.1 Problemes resolts

1. Estudieu si té solució o no el sistema següent

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ 2x+y-z = 3 \\ 4x+2y+z = 0 \\ x+y+3z = -1 \end{array}\right\}$$

Resolució. El sistema té solució si, i només si

$$\text{rang}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \text{rang}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Comencem estudiant el rang de la primera matriu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Concloem doncs que rang $A = 3$.

Estudiem ara el rang de la matriu ampliada. Per veure si és o no quatre, calculem el determinant següent

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 6 & -9 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$$

Finalment, tenim $3 = \text{rang } A \neq \text{rang } A' = 4$ i, per tant, podem concloure que el sistema no té solució.

• • •

2. Discutiu, segons els valors de α, l'existència de solucions per al sistema següent

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x+y+z = 1 \\ x+\alpha y+z = \alpha \\ x+y+\alpha z = \alpha^2 \end{array}\right\}$$

Resolució. De seguida ens adonem que si $\alpha = 1$ les tres equacions del sistema són la mateixa. Així doncs, en aquest cas tenim un sistema compatible determinat amb dos graus de llibertat. A partir d'ara suposarem $\alpha \neq 1$.

Anomenem A a la matriu del sistema i A' a la matriu que s'obté d'ampliar A amb els termes independents, és a dir,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}\right)$$

Sabem que el sistema és compatible si, i només si, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$ i, a més, serà determinat si, i només si, aquest rang és tres.

Anem doncs a estudiar aquests rangs. Si $\alpha \neq 1$, aleshores

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha \neq 0\,.$$

D'on concloem que el rang d'A és almenys dos. Anem a veure si en algun cas és tres.

$$D_3 = \det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 2 - 3\alpha = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2).$$

Tenim doncs,

$$\operatorname{rang} A = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq 1, -2\,.$$

Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1, -2$, $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang} A'$ i, per tant, el sistema és compatible determinat.

Només ens falta estudiar el cas $\alpha = -2$. Concretament, ens manca calcular el rang d'A' en aquest cas. Com $D_3 = 0$ per a $\alpha = -2$,

$$\operatorname{rang} A' = 3 \Longleftrightarrow D'_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 \neq 0\,.$$

Però substituint α per -2 ens dóna $D'_3 \neq 0$, amb la qual cosa el rang d'A' veiem que és tres.

Així doncs, el sistema és incompatible quan $\alpha = -2$.

• • •

3. Resoleu el sistema d'equacions següent

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x + y &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolució. Considerem la matriu dels coeficients del sistema i calculem el seu determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\,.$$

Atès que aquest determinant és no nul, el rang de la matriu és màxim i, per tant, el sistema és compatible determinat. L'única solució (x_0, y_0, z_0) del sistema la calculem mitjançant els determinants següents

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{4} = 1, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = 1, \qquad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = 0\,.$$

Finalment, la solució és $x_0 = 1\,,\ y_0 = 1\,,\ z_0 = 0\,.$

• • •

4. Resoleu el sistema d'equacions següent

$$\left.\begin{aligned} 3x + y - z + t - 2u + v &= 2 \\ x - y + u - v &= 1 \\ z + t - u + v &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Resolució. La matriu de coeficients d'aquest sistema és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Busquem un menor d'ordre màxim no nul, per exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0\,.$$

Així doncs, el rang de la matriu A és màxim i, per tant, coincideix amb el de la matriu que s'obté a l'ampliar A amb els termes independents. Per tant, el sistema és compatible. Atès que hi ha més incògnites que equacions, és indeterminat i el nombre de graus de llibertat serà

$$\text{núm. d'incògnites} - \text{núm d'equacions} = 6 - 3 = 3\,.$$

En aquest cas tenim tres graus de llibertat i podem deixar totes les solucions del sistema expressades en funció de les tres últimes incògnites.

Reescrivim el sistema de la manera següent:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y - z &= 2 - t + 2u - v \\ x - y &= 1 - u + v \\ z &= 3 - t + u - v \end{aligned}\right\}$$

I procedim de forma similar a com ho fèiem en l'exercici anterior. Concretament, les solucions del sistema les calculem mitjançant els determinants següents:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 2-t+2u-v & 1 & -1 \\ 1-u+v & -1 & 0 \\ 3-t+u-v & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-6+2t-2u+v}{-4} \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-t+2u-v & -1 \\ 1 & 1-u+v & 0 \\ 0 & 3-t+u-v & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-2+2t-6u+5v}{-4} \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2-t+2u-v \\ 1 & -1 & 1-u+v \\ 0 & 0 & 3-t+u-v \end{vmatrix}}{-4} = 3-t+u-v
\end{aligned}
$$

Finalment, el conjunt de solucions del sistema és

$$\left\{\left(\frac{-6+2t-2u+v}{-4}, \frac{-2+2t-6u+5v}{-4}, 3-t+u-v,\ t,\ u,\ v\right) \,\middle|\, t,u,v \text{ qualssevol}\right\}.$$

5.4.2 Problemes proposats

1. Discutiu el sistema següent, segons els diferents valors de les constants $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} x+z &= a \\ y+z &= 0 \\ 2x+y+3z &= 1 \\ bx+2y+z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solució.

- Si $b=-1$, el sistema és compatible indeterminat, per a tot $a \in \mathbb{R}$.
- Si $b \neq 1$, el sistema és incompatible determinat.

2. Discutiu i resoleu el sistema d'equacions següent

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4 &= 3 \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4 &= 2 \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4 &= 7 \\ 3x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solució. El sistema és compatible indeterminat. El conjunt de solucions és

$$\left\{\left(\frac{31}{6}+\frac{1}{2}x_4,\ \frac{2}{3},\ \frac{-7}{6}-\frac{1}{2}x_4,\ x_4\right) \,\middle|\, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

5.5 Miscel·lània

5.5.1 Problemes resolts

1. Calculeu el determinant següent:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+n \end{vmatrix}$$

Resolució. Per tal d'aconseguir "fer" zeros, restem a la columna k-èsima k vegades la primera, $k = 2, \dots, n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & -2x & -3x & \dots & -nx \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Llevat de la primera, totes les columnes estan multiplicades per x. Treiem la x fora:

$$D_n = x^{n-1} \begin{vmatrix} x+1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Restant a la primera columna totes les altres obtenim una matriu triangular:

$$D_n = x^{n-1} \begin{vmatrix} x+1+2+\cdots+n & -2 & -3 & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

D'on obtenim $D_n = x^{n-1}(x+1+2+\cdots+n)$. Si sumem $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, finalment

$$D_n = x^{n-1}\left[x + \frac{n(n+1)}{2}\right] = x^{n-1}\left[x + \frac{n^2+n}{2}\right].$$

• • •

2. Trobeu el conjunt de solucions del sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y-3z&=0\\ y+3z-t&=8\\ x+y+t&=2\\ 2x-4t&=1 \end{aligned}\right\}$$

Resolució. El determinant de la matriu del sistema és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1\\ 0 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-2)\begin{vmatrix} -3 & -1\\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)15 = -30 \neq 0\,.$$

D'on deduïm que el sistema té solució única. Trobem aquesta solució aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 0\\ 8 & 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & -1\\ 8 & 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 4 & -3\\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-13}{10}$$

$$y = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 8 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0\\ 1 & 8 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{-1}{10}\begin{vmatrix} 6 & -2\\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \frac{21}{5}$$

$$z = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 8 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 8 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} -1 & 8 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} -1 & 10 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{-1}{30}\begin{vmatrix} -1 & 10\\ 2 & 9 \end{vmatrix} = \frac{29}{30}$$

$$t = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 8\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0\\ -16 & 1 & 3 & 8\\ -3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3\\ -16 & 1 & 3\\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3\\ -15 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{vmatrix} -15 & 2\\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-9}{10}$$

L'única solució del sistema és:

$$x = \frac{-13}{10},\ \ y = \frac{21}{5},\ \ z = \frac{29}{30},\ \ t = \frac{-9}{10}\,.$$

• • •

3. Trobeu el conjunt de solucions del sistema

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z+t&=0\\ 2x+2y+2z&=0\\ 2x+z&=0\\ -x-y-t&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Resolució. Sigui A la matriu dels coeficients del sistema. Si el determinant de la matriu A fos no nul, el sistema tindria una única solució i, atès que el sistema és homogeni, aquesta solució única seria la trivial.

Estudiem, doncs, el determinant següent:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ f_1'=f_1+f_4\\ f_2'=\frac{1}{2}f_2}}{=} 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ f_3'=f_3-2f_2}}{=} (-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Concloem que el sistema és compatible indeterminat (recordeu que un sistema homogeni sempre és compatible). Estudiem ara si hi ha algun menor d'ordre 3 no nul. Per exemple,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\,.$$

El sistema (5.2) és equivalent al sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z+t&=0\\ x+y+z&=0\\ 2x+z&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

I aquest el podem reescriure així:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=-t\\ x+y+z&=0\\ 2x+z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Apliquem la regla de Cramer per resoldre el sistema, deixant les tres primeres incògnites en funció de l'última.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -t & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2t}{4} = \frac{-t}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -t & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{t\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2t}{4} = \frac{-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -t \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-t\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4t}{4} = t$$

Així doncs, el conjunt de solucions del sistema (5.2) és:

$$S = \left\{ \left(\frac{-t}{2},\ \frac{-t}{2},\ t,\ t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

• • •

4. Siguin $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ amb $|A| \neq 0$ i $|B| \neq 0$. Sigui $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ la solució del sistema $AX = U$, $U \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Discutiu i resoleu el sistema d'equacions $MZ = N$, on $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right)$ i $N = \left(\begin{array}{c} U \\ \hline CX \end{array}\right)$

Resolució. Observem, en primer lloc, que al ser $|A| \neq 0$ el sistema $AX = U$ és compatible determinat i X és, doncs, l'única solució del sistema: $X = A^{-1}U$.

Com que $|M| = |A|\,|B| \neq 0$, el sistema $MZ = N$ és també compatible determinat. Posem $Z = \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \end{array}\right)$ amb $Z_1, Z_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Llavors:

$$MZ = N \iff \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} U \\ \hline CX \end{array}\right) \iff \left\{ \begin{array}{l} AZ_1 = U \\ CZ_1 + BZ_2 = CX \end{array} \right.$$

De la primera equació deduïm que $Z_1 = X$. De la segona, deduïm que $Z_2 = B^{-1}(CX - CZ_1) = B^{-1}(CX - CX) = 0$.

Així doncs, el sistema $MZ = N$ té una única solució, que és $Z = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 0 \end{array}\right)$.

5.5.2 Problemes proposats

1. Estudieu si són invertibles o no les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució. A sí; B sí; C sí; D no.

2. Calculeu, mitjançant determinants, les inverses de les matrius de l'exercici anterior que són invertibles.

Solució.

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Proveu que si la matriu $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, amb $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, és invertible, també ho són les matrius $A^i B^t$, $A^t B^j$ per a $i, j \geq 1$.

4. Calculeu el determinant següent:

$$D = \begin{vmatrix} x+y & y & y & y \\ y & x+y & y & y \\ y & y & x+y & y \\ y & y & y & x+y \end{vmatrix}.$$

Solució. $D = x^3(x+4y)$.

Referències

Són molts els textos d'àlgebra lineal que es poden recomenar als estudiants que vulguin aprofundir en els temes tractats en aquest llibre, i una llista de tots ells seria molt llarga. Tot i amb això, creiem interessant recomenar-ne uns quants que, en la nostra opinió, presenten uns trets característics que els destaca en un o altre aspecte. Tot ells contenen temes més enllà dels tractats en aquest llibre, ja que molts d'ells constitueixen per si mateixos un curs complet d'àlgebra lineal.

Textos bàsics

- J. de Burgos: Álgebra lineal. McGraw Hill (1993).
- M. Castellet, I. Llerena: Àlgebra Lineal i Geometria. *Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona* (1991).
- J. W.Daniel, B. Noble: Álgebra Lineal Aplicada. *Prentice-Hall* (1989).
- E. Hernández: Álgebra y geometría. Addison Wesley UAM (1994).
- M. C. Hernando, M. D. Magret, C. Puig: *Espais vectorials. Aplicacions lineals. Diagonalització.* Col·lecció Aula Teòrica. Edicions upc (1999).
- S. Lang: Álgebra Lineal. *Fondo educativo interamericano* (1976).
- D. C. Lay: Linear Algebra and its Applications. *Addison-Wesley* (1994).
- F. Puerta: Àlgebra Lineal. *Col·lecció AULA-ETSEIB. Edicions upc* (1995).
- G. Strang: Álgebra lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana (1982).

Altres textos

- M. Á. Barja, M. Isabel García, M. Carmen Hernando, M. Dolors Magret, F. Planas, C. Puig: Àlgebra Lineal. Problemes resolts i comentats. *Col·lecció Aula Pràctica. Edicions upc.* (1993).
- M. Carmen Hernando, M. Dolors Magret, C. Puig: Forma reduïda de Jordan: Aplicacions. *Col·lecció Aula Teòrica. Edicions upc.* (1997).
- J. R. Torregrosa, C. Jordan: Álgebra Lineal y sus aplicaciones, teoría y problemas resueltos. *Colección Schaum's McGraw Hill* (1987).